Transformations d’images

GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique

Jean-François Lalonde

Merci à D. Hoiem, A. Efros et S. Seitz

Transformations d’images

Transformations linéaires

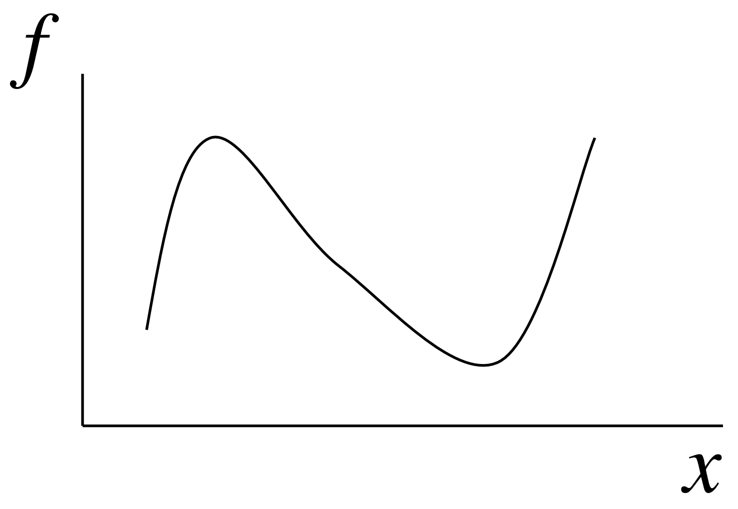
GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique

Jean-François Lalonde

Merci à D. Hoiem, A. Efros et S. Seitz

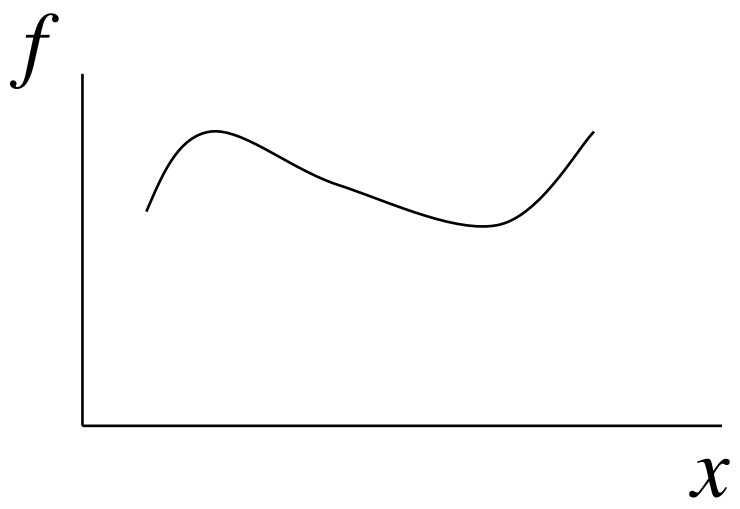
Transformations vs filtrage

- filtrage: modifier l'**image** du signal

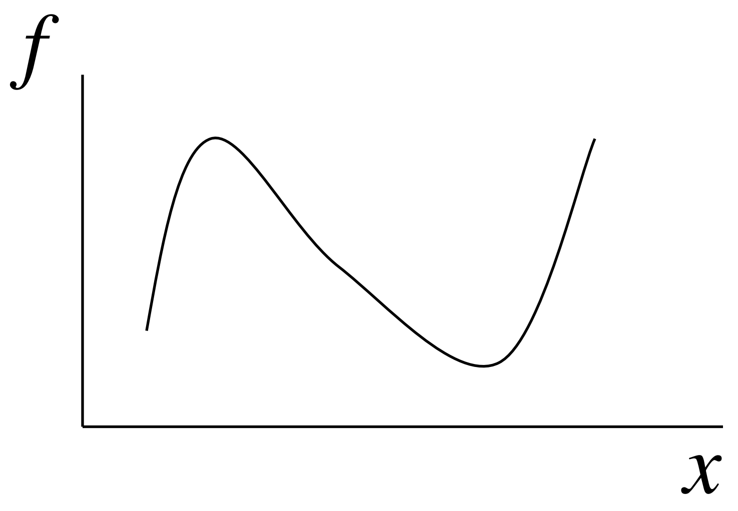


$$g(x) = T(f(x))$$

$$\longrightarrow T \longrightarrow$$

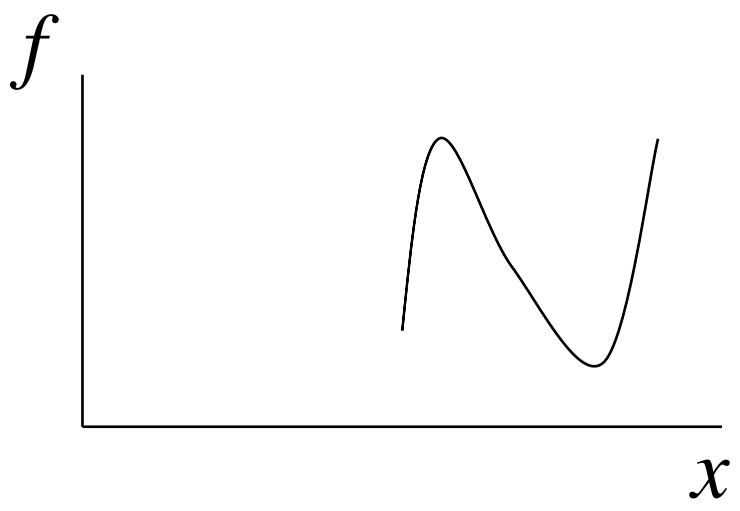


- transformations: modifier le **domaine** du signal



$$g(x) = f(T(x))$$

$$\longrightarrow T \longrightarrow$$



Transformations vs filtrage

- filtrage: modifier l'**image** du signal

$$g(x) = T(f(x))$$

$$\longrightarrow \; T \; \longrightarrow$$

- transformations: modifier le **domaine** du signal

$$g(x) = f(T(x))$$

$$\longrightarrow \; T \; \longrightarrow$$

Transformations globales (paramétriques)

- Une transformation T modifie les **coordonnées** des pixels :

$$\mathbf{p}' = T(\mathbf{p})$$

- Pourquoi « globale »?
  - La même transformation est appliquée à chaque point
- Pourquoi « paramétrique »?
  - Peut être représentée par un faible nombre de paramètres

Transformations linéaires

- Pour qu'une transformation soit linéaire, il faut qu'on puisse la représenter avec une matrice:

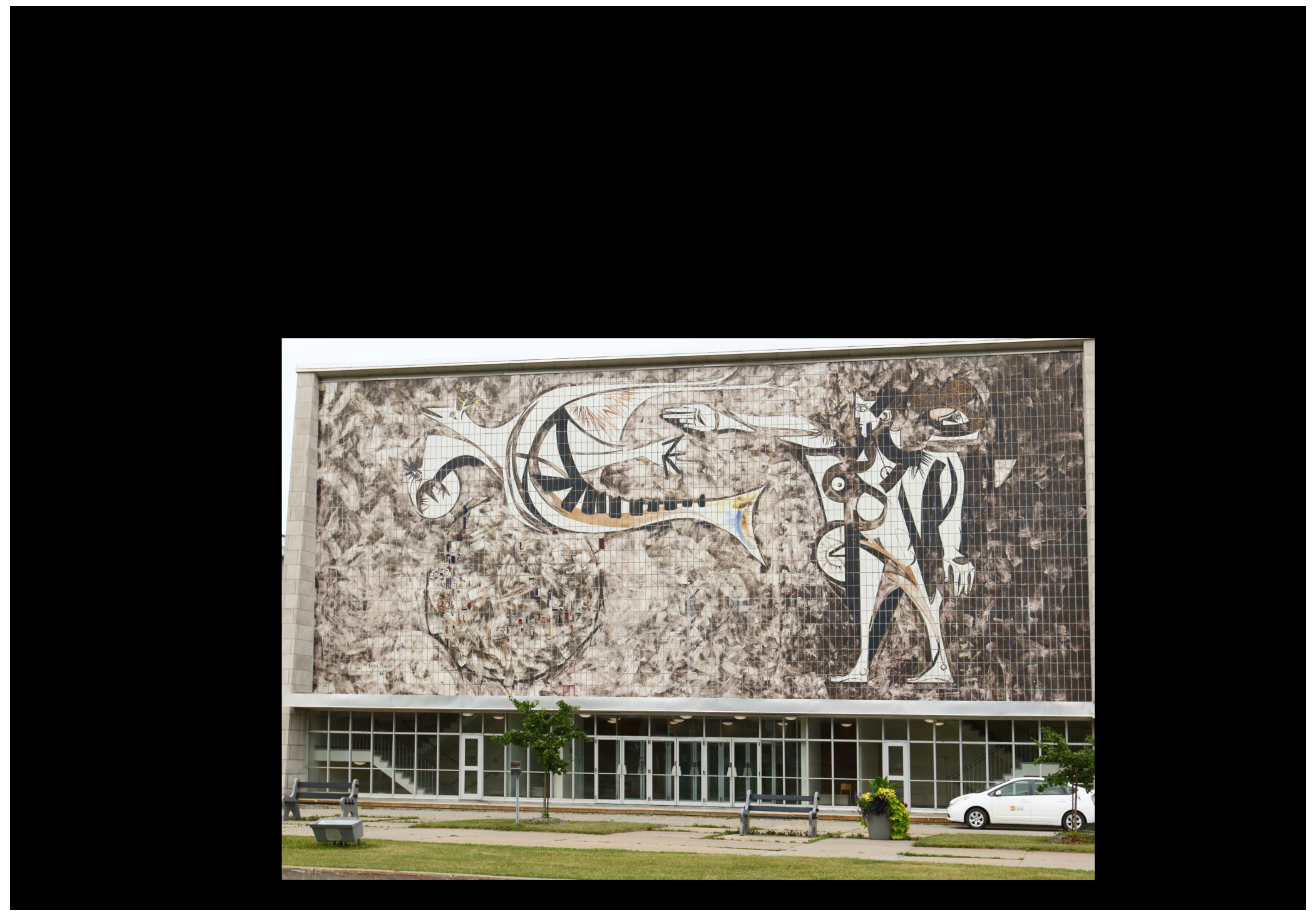
$$\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformations globales

image originale

translation



rotation

échelle

étirement

affine

perspective

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Identité?

$$x' = x$$

$$y' = y$$

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Facteur d'échelle autour de (0,0)?

$$x' = s_x x$$

$$y' = s_y y$$

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Réflexion en x?

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Réflexion par rapport à l'origine?

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

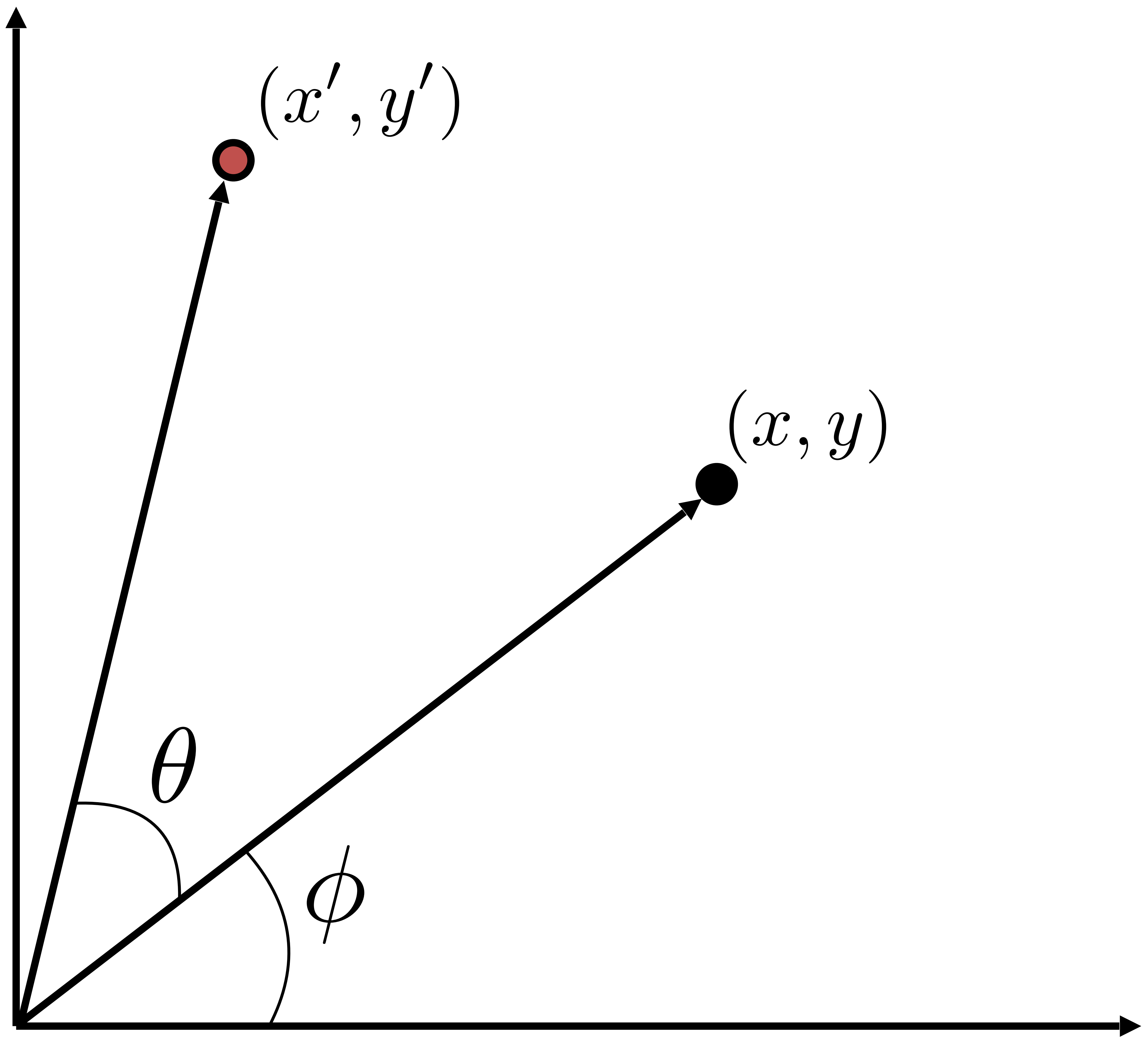
Étirement (*shear*)?

$$x' = x + k_x y$$

$$y' = y + k_y x$$

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Rotation?



Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Rotation?

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Rotation 2D

- Forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Même si $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont des fonctions non-linéaires en θ,
  - x' et y' sont des combinaisons linéaires de x et y
- Quelle est la transformation inverse?
  - Rotation par $-\theta$
  - Pour les matrices de rotation:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

Quelles transformations peuvent être représentées par des matrices 2x2?

Translation?

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Seulement les fonctions **linéaires en x et y** peuvent être représentées par des matrices 2x2!

Transformations linéaires

- Toutes les transformations linéaires sont des combinaisons de:
  - échelle, rotation, étirement, réflexion

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Propriétés
  - Origine ne change pas
  - Sont préservées : lignes, lignes parallèles, ratios, droites
  - La composition de transformations linéaires est une transformation linéaire

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformations d'images

Coordonnées homogènes

GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique

Jean-François Lalonde

Merci à D. Hoiem, A. Efros et S. Seitz

Translations?

- Comment pouvons-nous représenter les translations sous forme matricielle?

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Coordonnées homogènes

- Représente des coordonnées 2-D avec un vecteur à 3 éléments

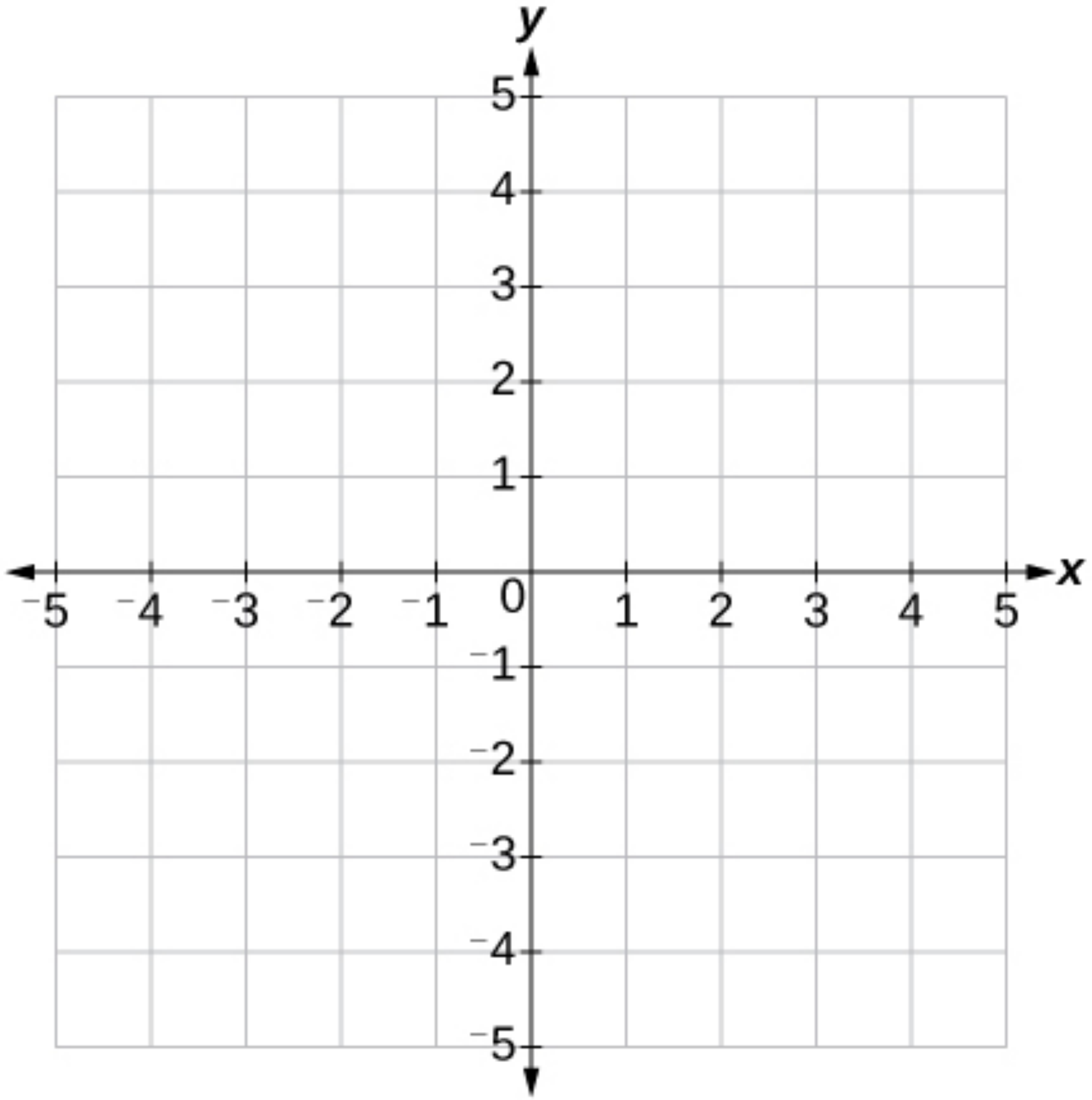
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Coordonnées homogènes}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Point 2D}} \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$$

Coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- Propriétés:
  - Invariance au facteur d'échelle
  - (x, y, 0) représente un point à l'infini
  - (0, 0, 0) n'est pas permis



Translations?

- Comment pouvons-nous représenter les translations sous forme matricielle?

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

- En utilisant une matrice 3x3!

Transformations 2D en matrices 3x3

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Échelle

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation

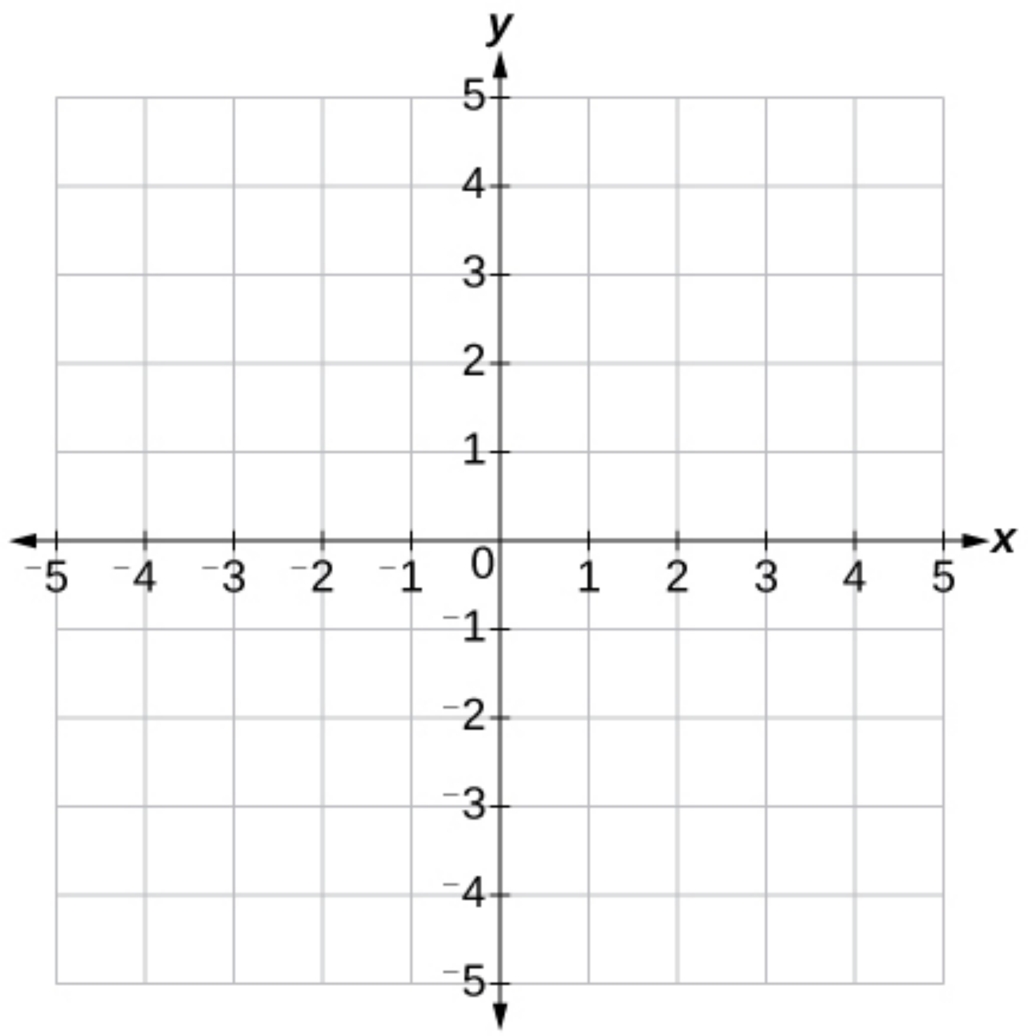
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Étirement

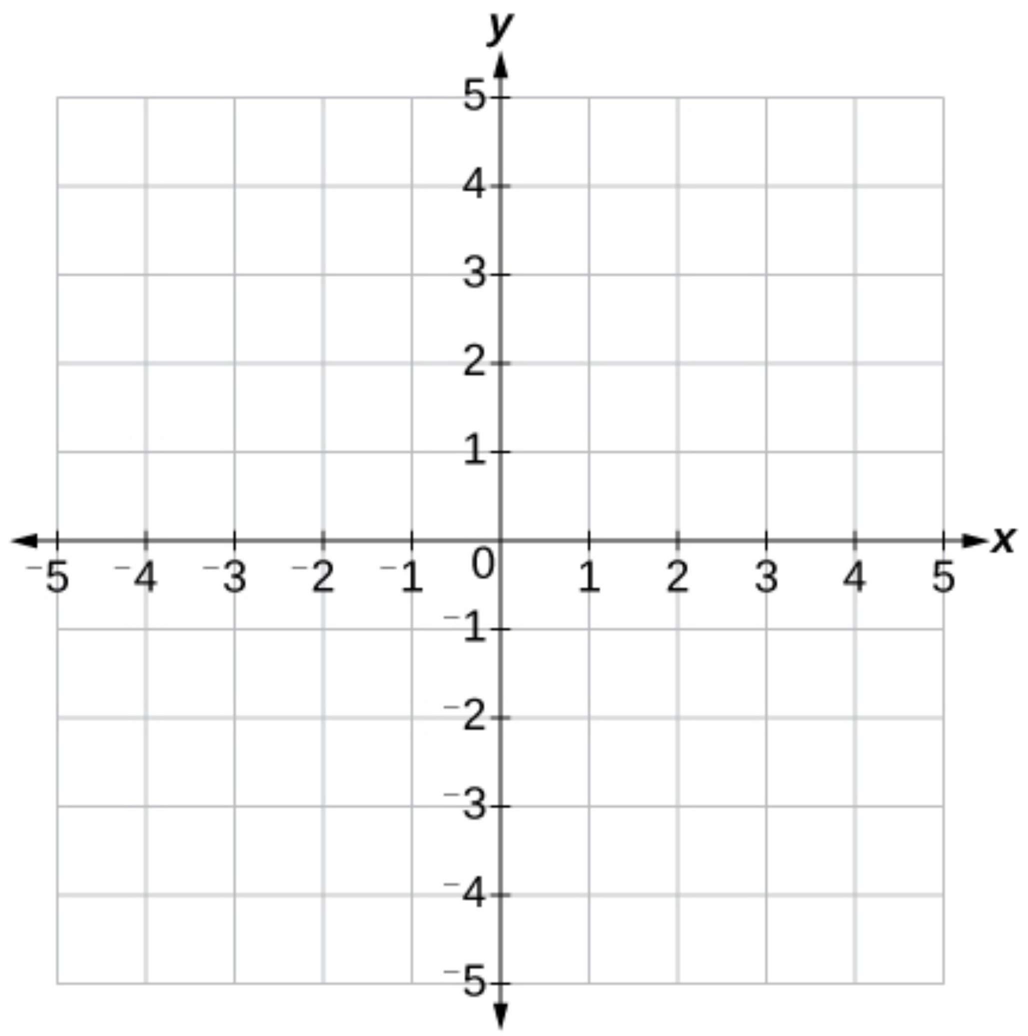
Transformations linéaires

Combien de degrés de liberté?

- Les transformations **linéaires** sont des combinaisons de:
  - échelle, rotation, étirement, réflexion
- Propriétés
  - Sont préservées : origine, lignes parallèles, ratios, droites
  - La composition de plusieurs transformations **linéaires** est une transformation **linéaire**



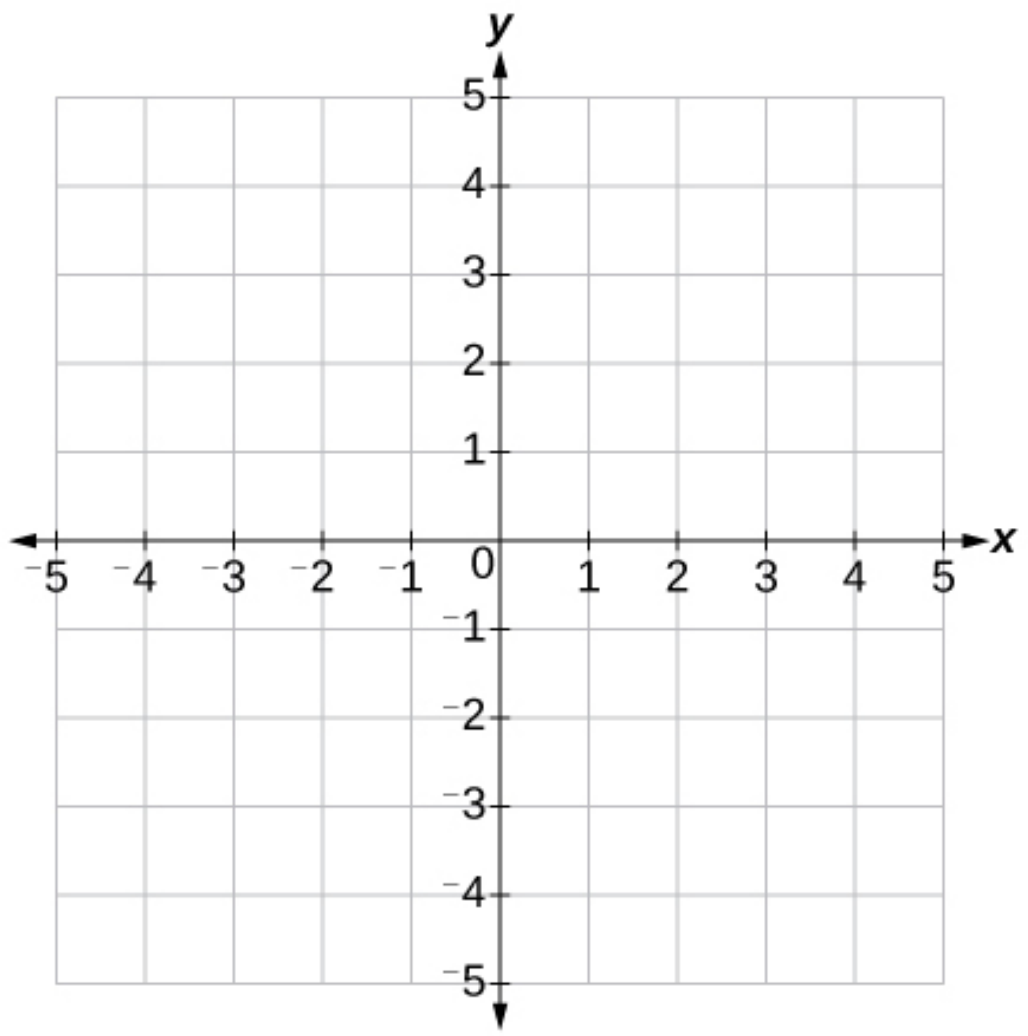
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



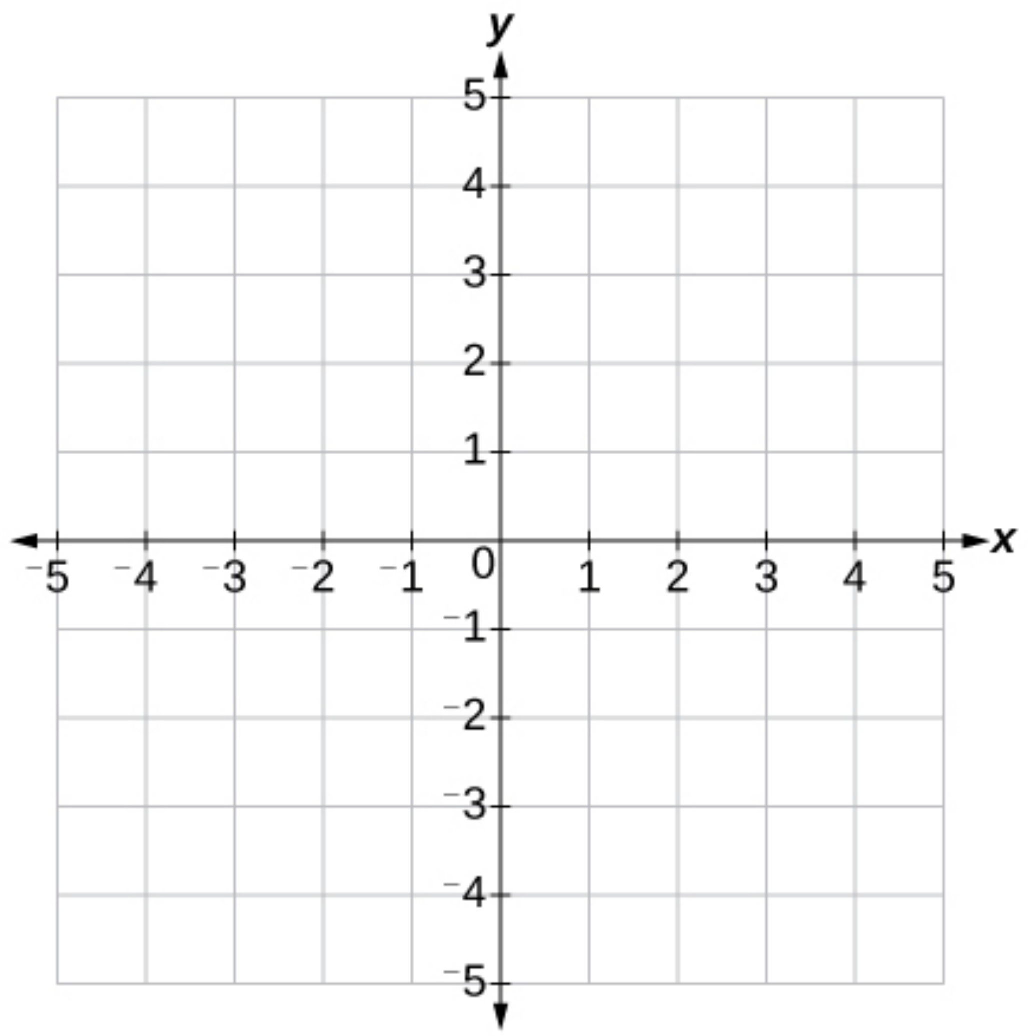
Transformations affines

Combien de degrés de liberté?

- Les transformées **affines** sont des combinaisons de:
  - échelle, rotation, étirement, réflexion et **translations**
- Propriétés
  - Sont préservées : ~~**origine**~~, lignes parallèles, ratios, droites
  - La composition de plusieurs transformations **affines** est une transformation **affine**



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Composition

- Les transformations peuvent être composées en multipliant les matrices

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

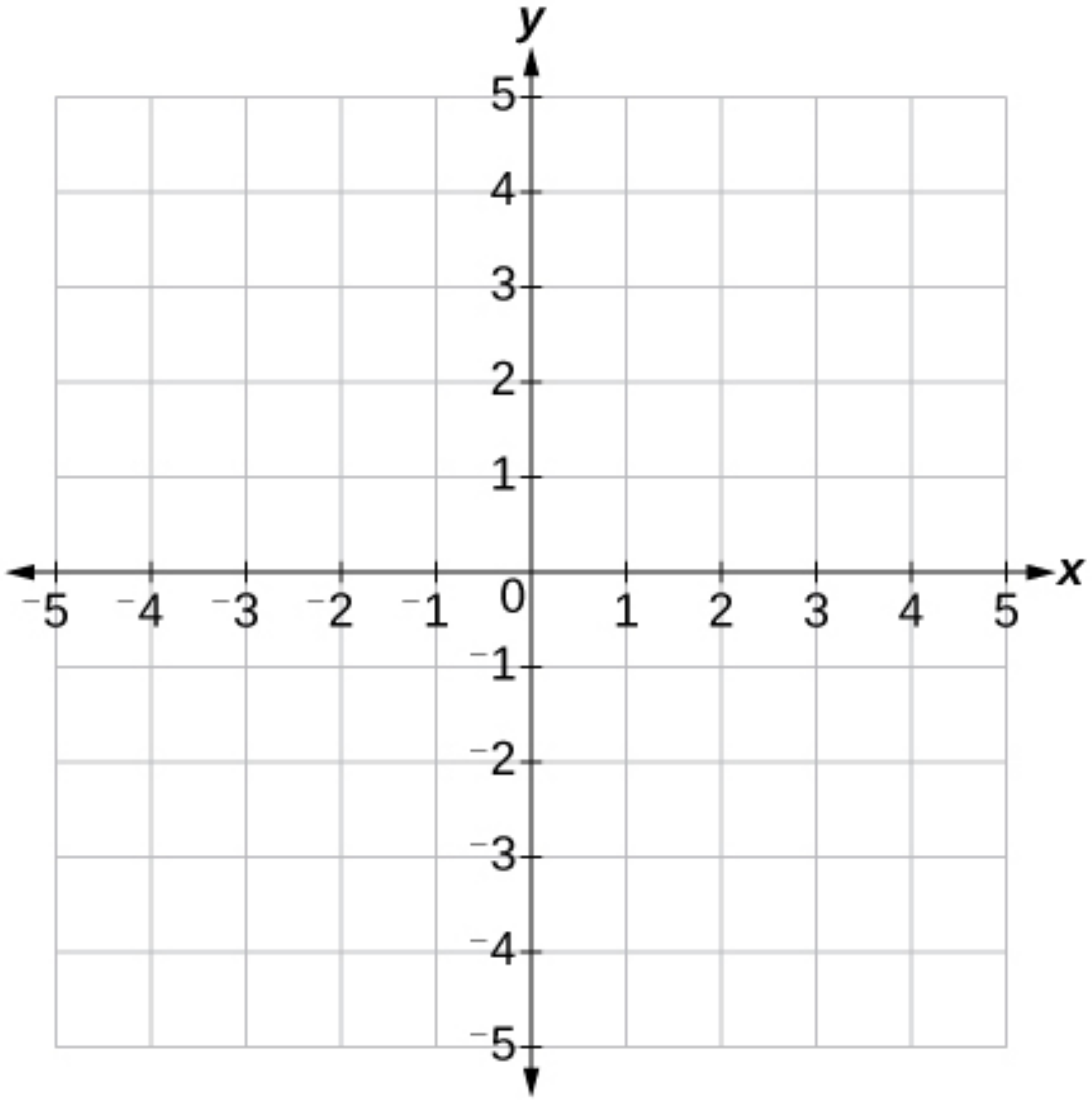
Dans quel ordre sont appliquées ces transformations sur le point?

Est-ce que l'ordre est important?

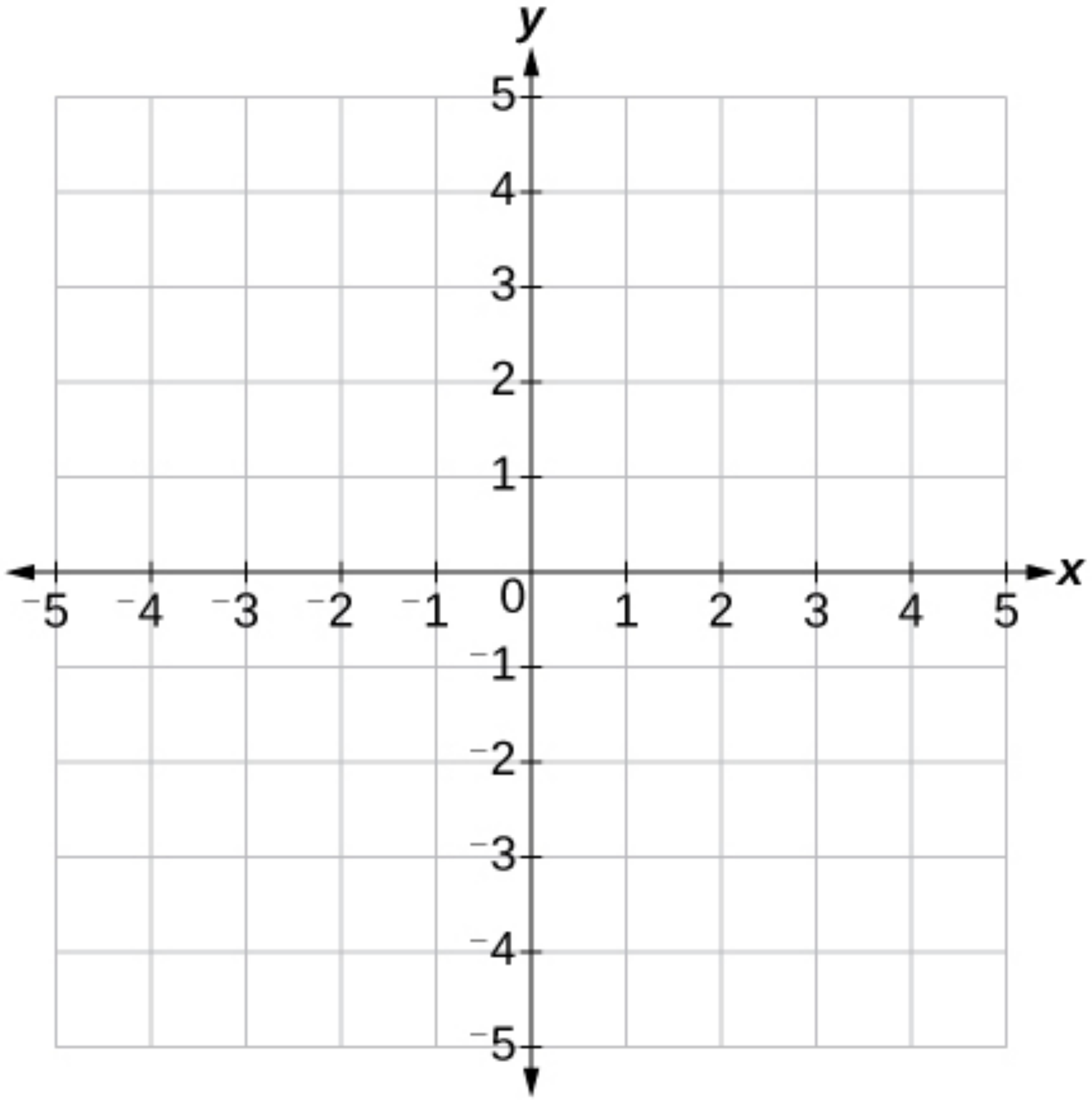
Composition

Est-ce que l'ordre est important?

Translation puis rotation



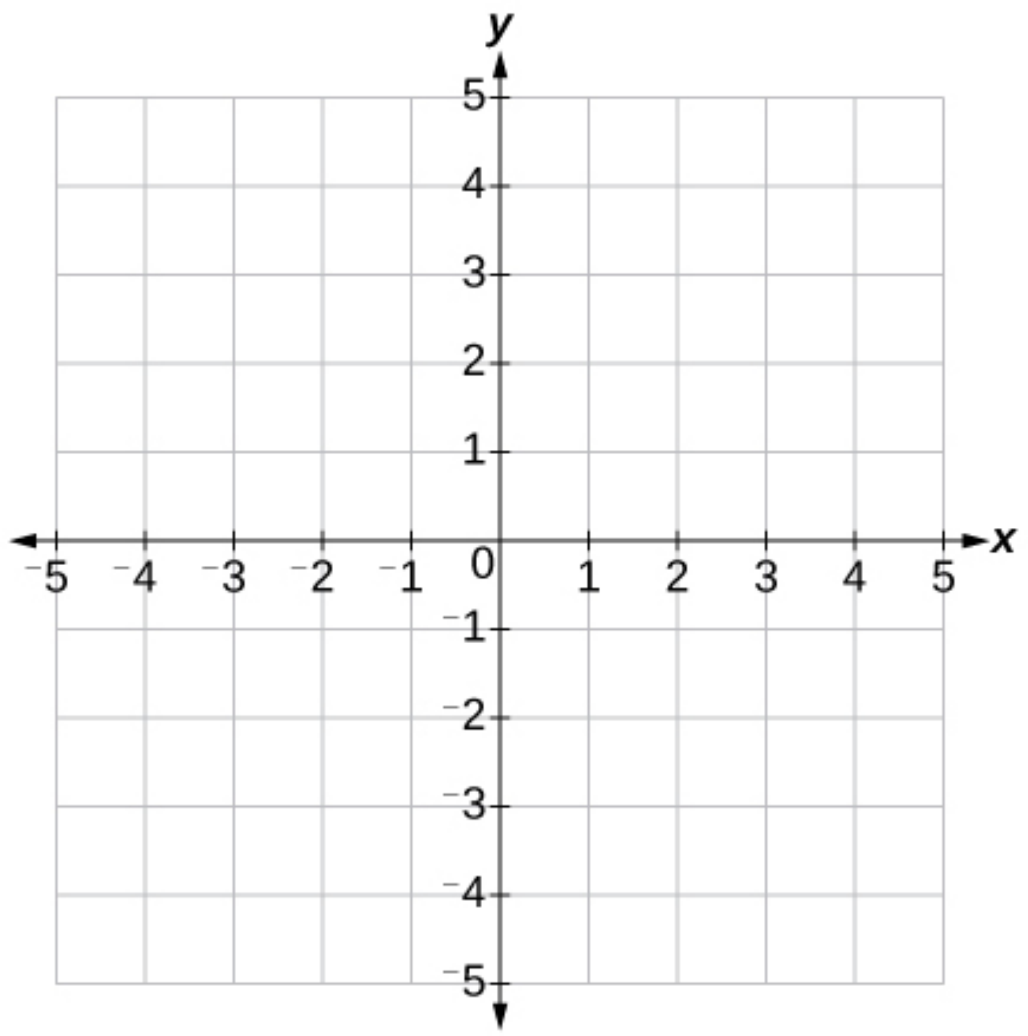
Rotation puis translation



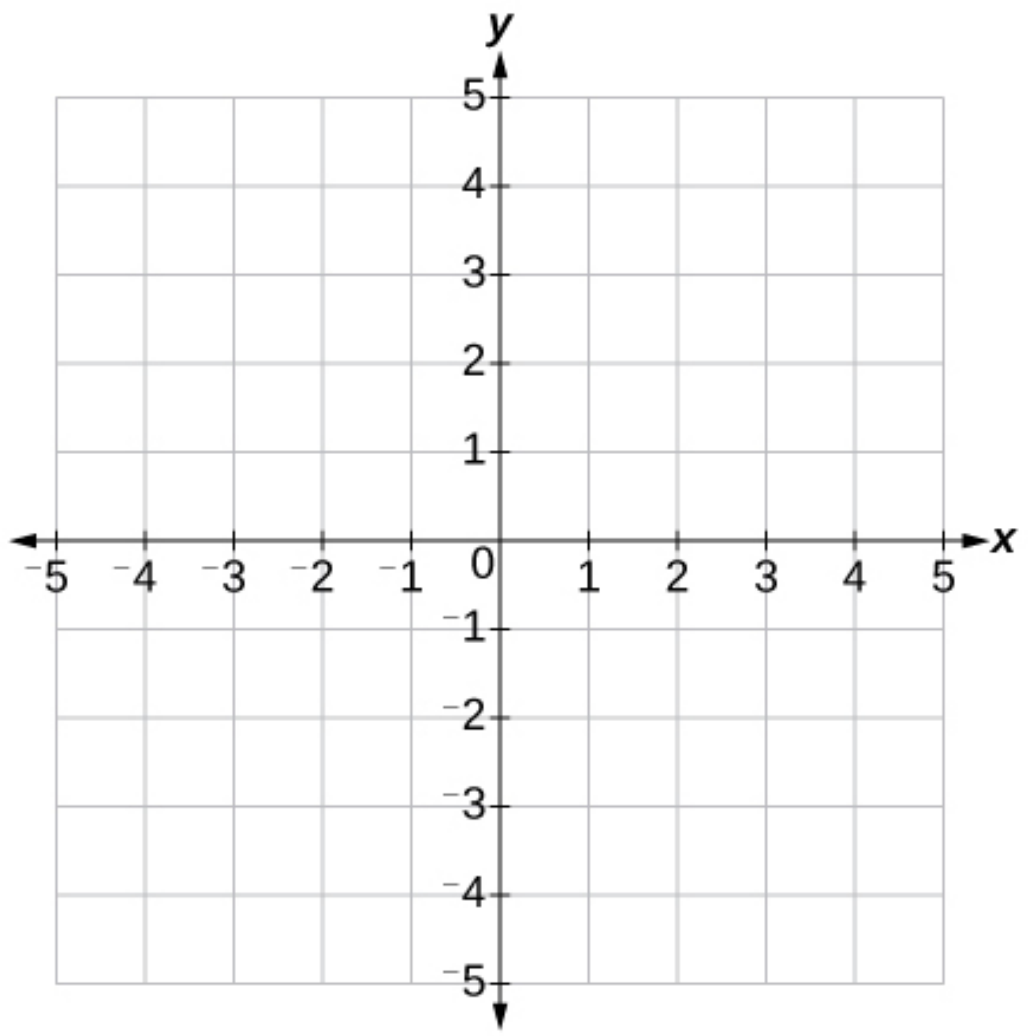
Transformations projectives

Combien de degrés de liberté?

- Les transformées **projectives** sont des combinaisons de:
  - transformation affines et **projections**
- Propriétés
  - Sont préservées : ~~origine~~, **~~lignes parallèles~~**, **~~ratios~~**, droites
  - La composition de plusieurs transformations **projectives** est une transformation **projective**

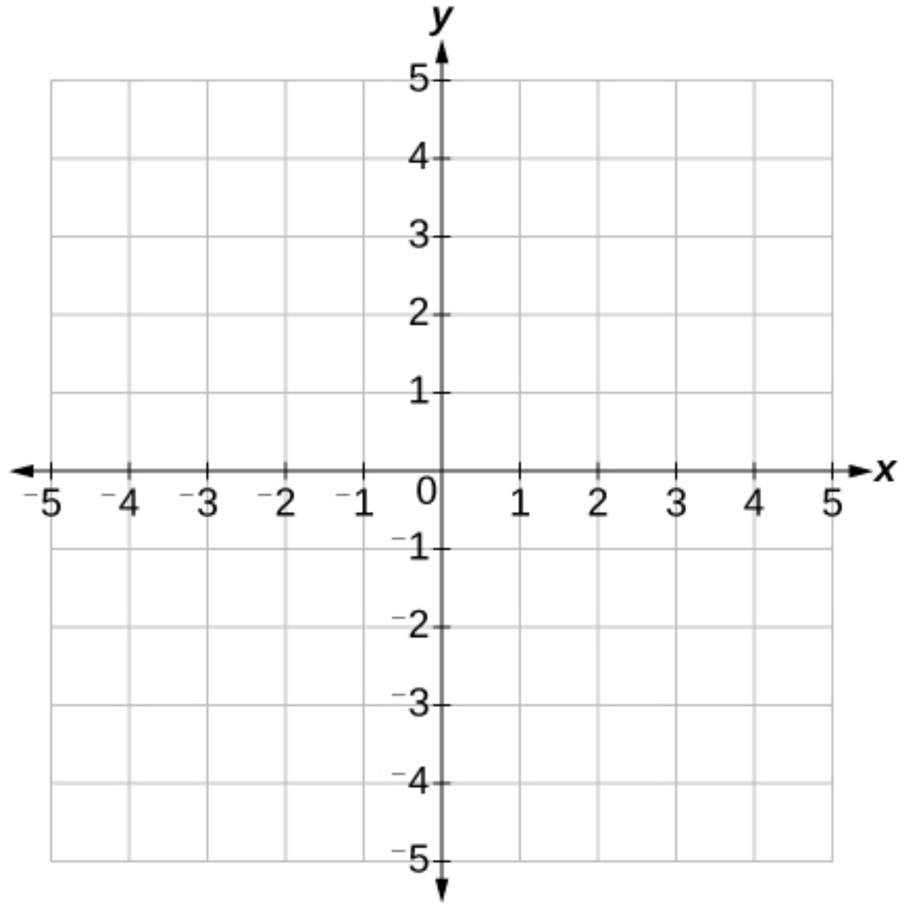


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

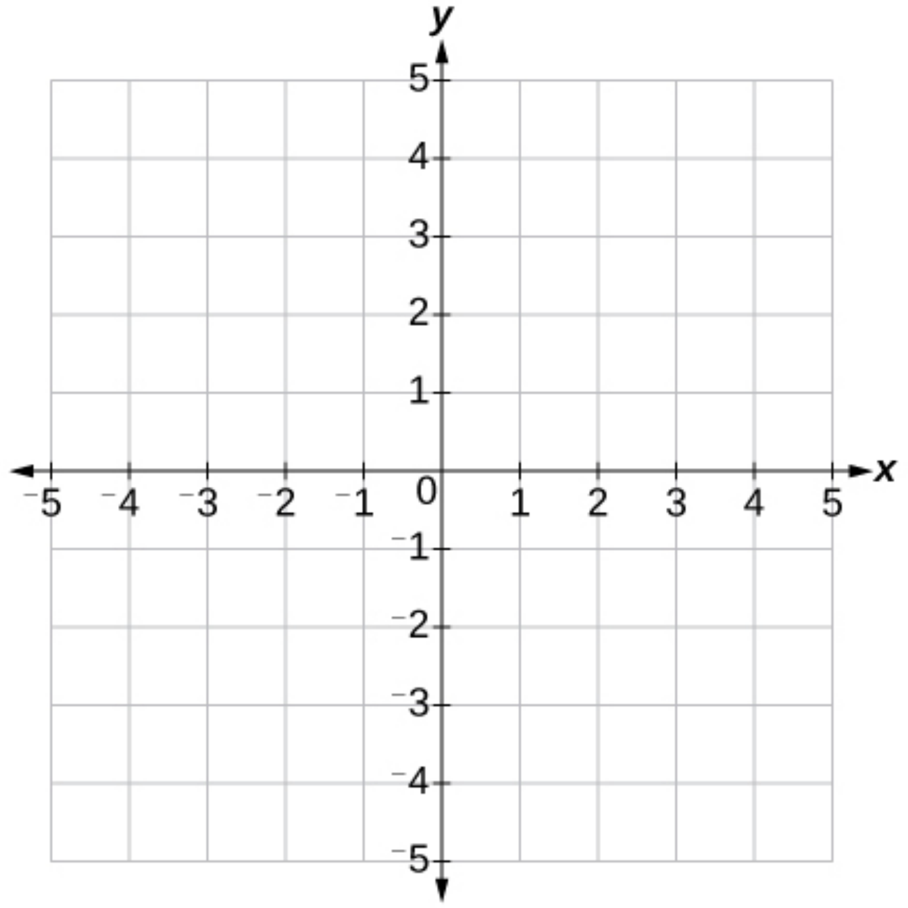
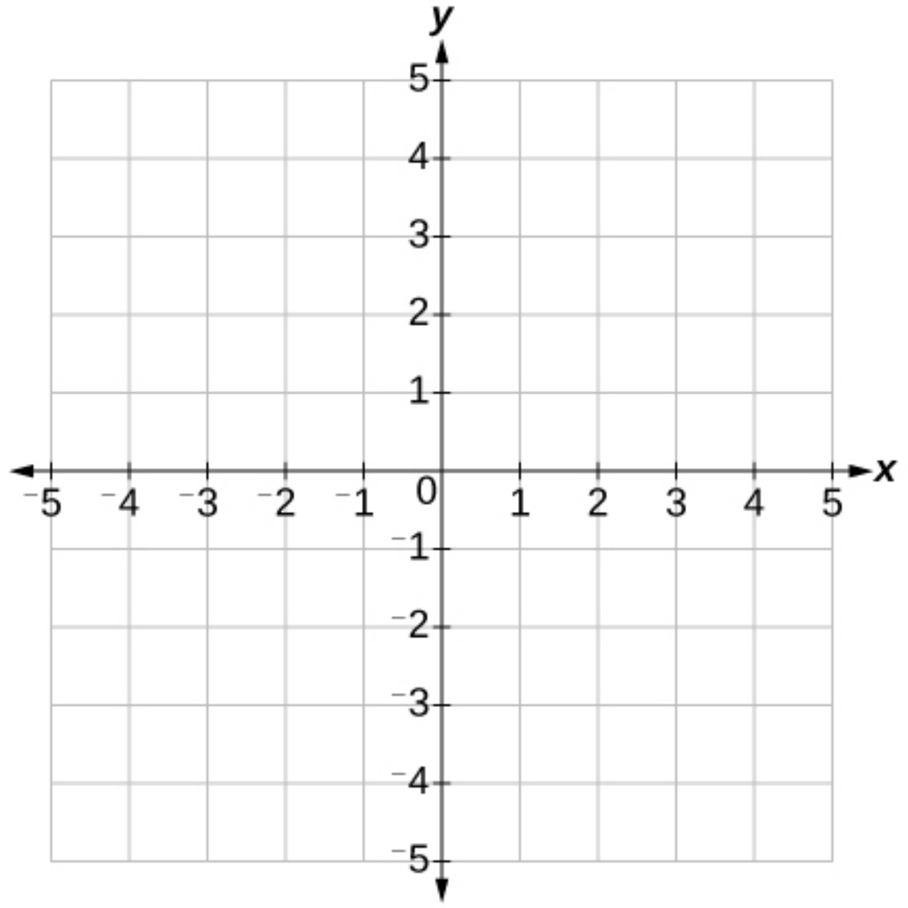
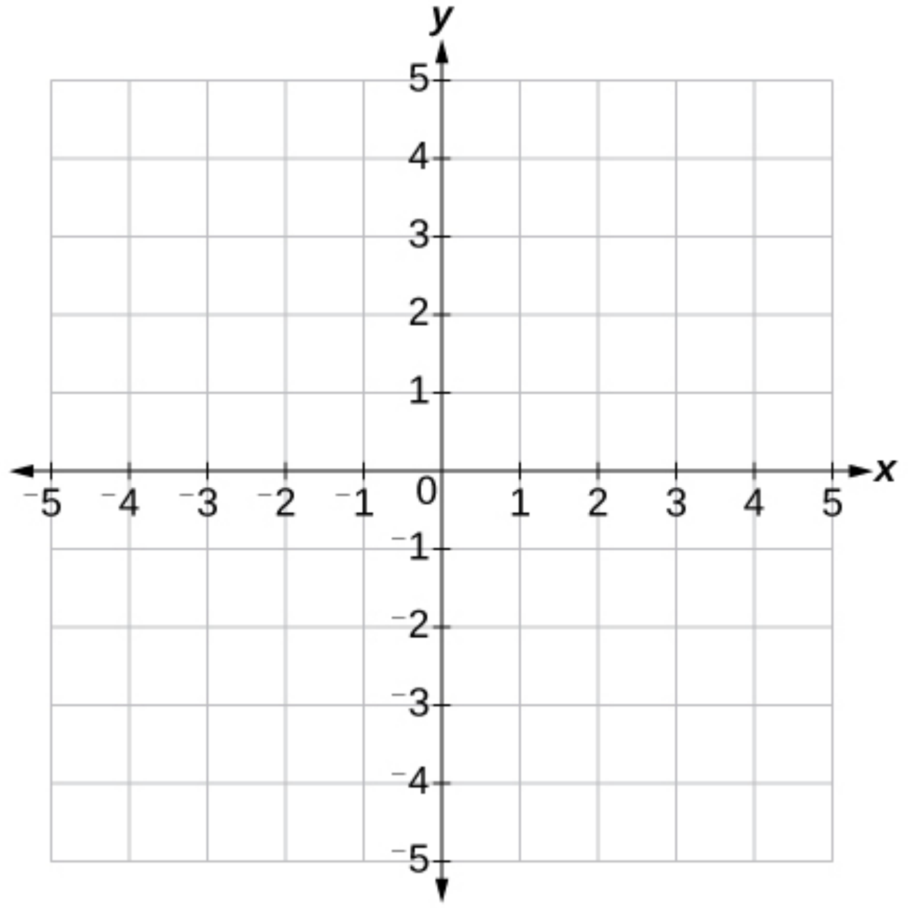
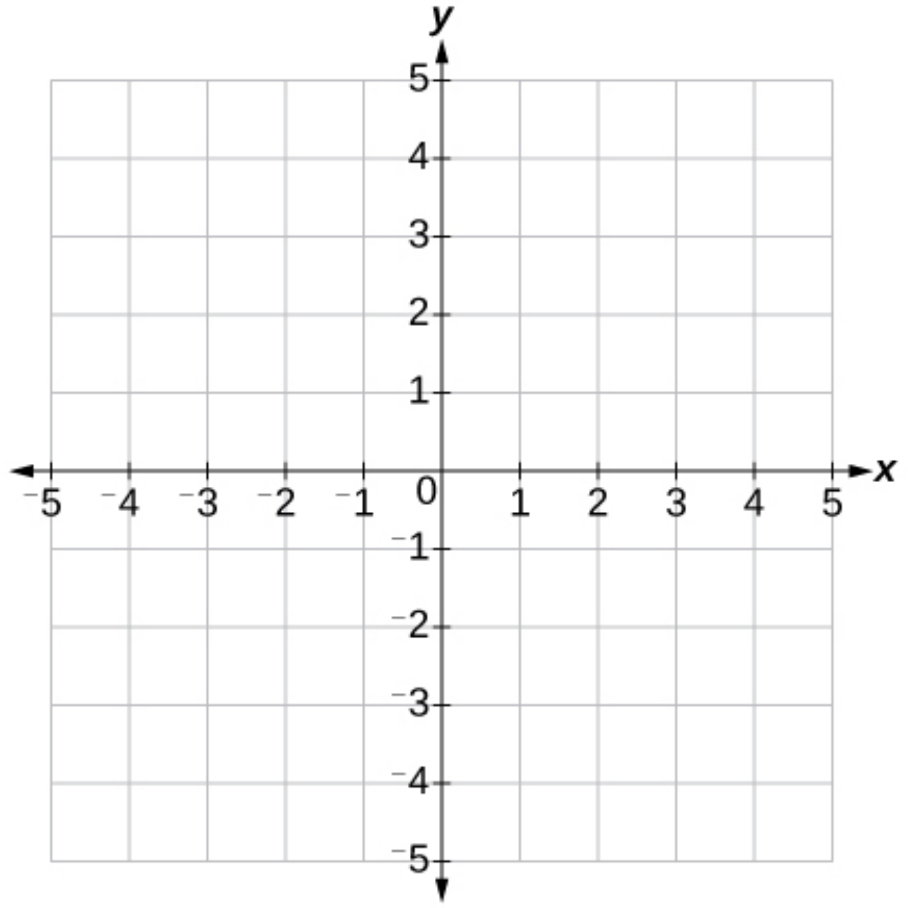
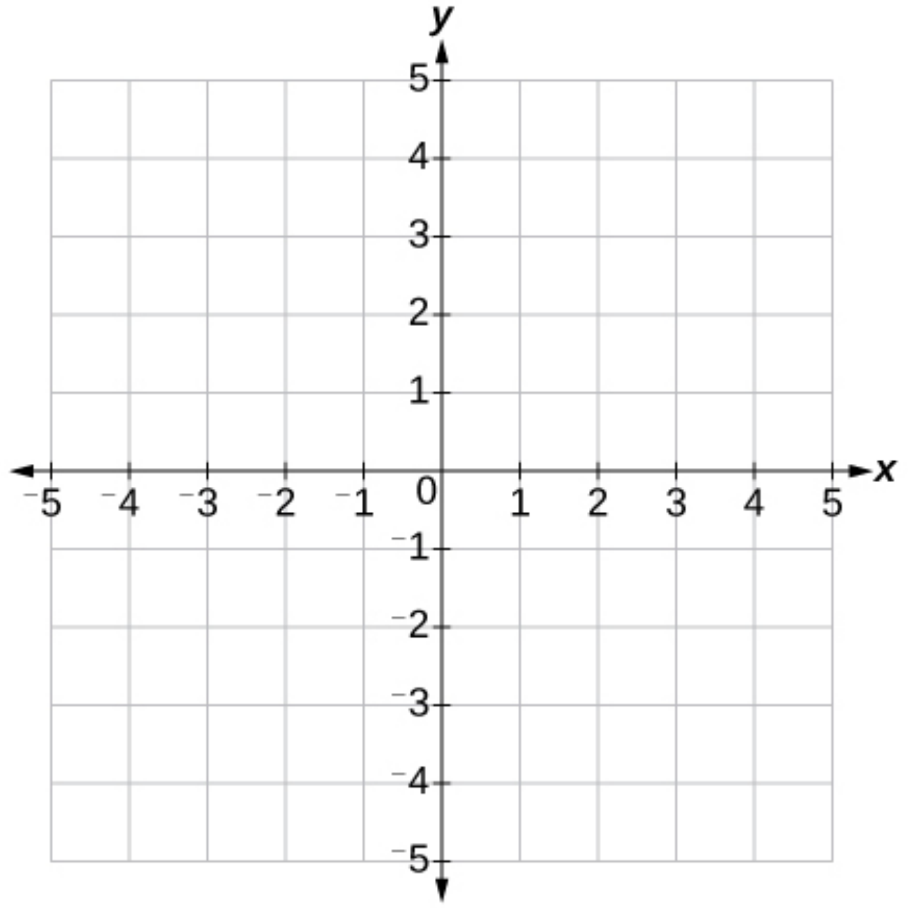


Survol

transformations linéaires (en coords. homogènes)



Dans chaque famille, la composition et l'inverse font également partie de la même famille.

Translation	Rigide (euclidienne)	Similarité	Affine	Projective
$\left[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{t}\,\right]_{2\times 3}$	$\left[\,\mathbf{R} \mid \mathbf{t}\,\right]_{2\times 3}$	$\left[\,s\mathbf{R} \mid \mathbf{t}\,\right]_{2\times 3}$	$\left[\,\mathbf{A}\,\right]_{2\times 3}$	$\left[\,\tilde{\mathbf{H}}\,\right]_{3\times 3}$
				
2 DDL	3 DDL	4 DDL	6 DDL	8 DDL
orientations, longueurs, angles, parallélisme, droites	~~orientations~~, longueurs, angles, parallélisme, droites	~~orientations~~, ~~longueurs~~, angles, parallélisme, droites	~~orientations~~, ~~longueurs~~, ~~angles~~, parallélisme, droites	~~orientations~~, ~~longueurs~~, ~~angles~~, ~~parallélisme~~, droites

Survol

transformations linéaires (en coords. homogènes)

Dans chaque famille, la composition et l’inverse font également partie de la même famille.

Translation

$\left[\, \mathbf{I} \mid \mathbf{t} \,\right]_{2\times 3}$

2 DDL

orientations, longueurs, angles, parallélisme, droites

Rigide (euclidienne)

$\left[\, \mathbf{R} \mid \mathbf{t} \,\right]_{2\times 3}$

3 DDL

~~orientations~~, longueurs, angles, parallélisme, droites

Similarité

$\left[\, s\mathbf{R} \mid \mathbf{t} \,\right]_{2\times 3}$

4 DDL

~~orientations~~, ~~longueurs~~, angles, parallélisme, droites

Affine

$\left[\, \mathbf{A} \,\right]_{2\times 3}$

6 DDL

~~orientations~~, ~~longueurs~~, ~~angles~~, parallélisme, droites

Projective

$\left[\, \tilde{\mathbf{H}} \,\right]_{3\times 3}$

8 DDL

~~orientations~~, ~~longueurs~~, ~~angles~~, ~~parallélisme~~, droites

Transformations d'images

Estimer une transformation

GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique
Jean-François Lalonde

Merci à D. Hoiem, A. Efros et S. Seitz

Estimer une transformation

- Étant données deux images.
  - Comment faire pour estimer leur transformation?
- Demandons à un utilisateur de nous indiquer des points de correspondance entre les 2 images
  - Combien en avons-nous besoin?

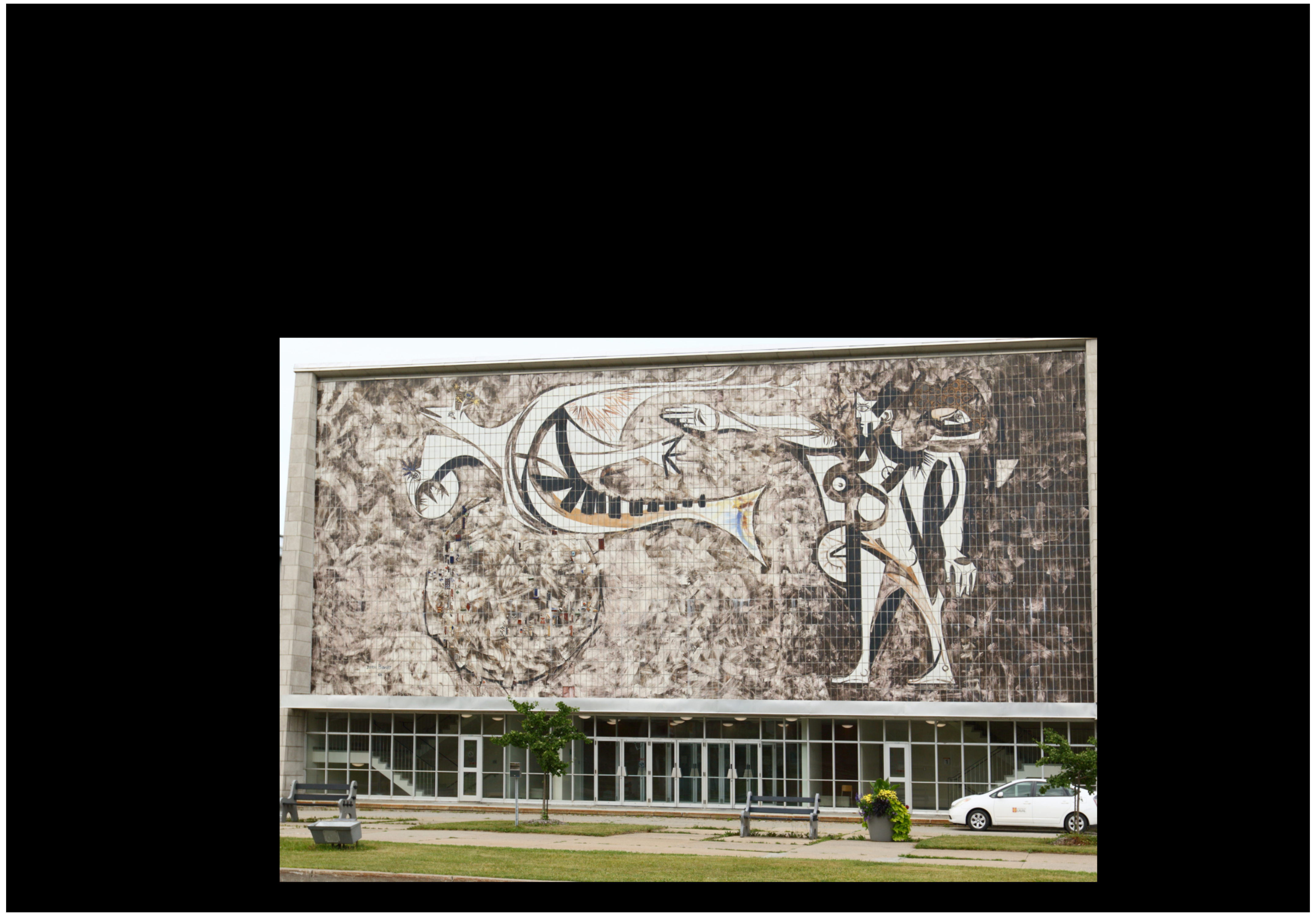
Estimer une translation

Où est l'origine?
Quel est le système d'axes?

- Combien de correspondances?

image 1

image 2



Estimer une transformation rigide

- Combien de correspondances?

image 1

image 2

Estimer une transformation affine

Attention!
Les points doivent être **linéairement indépendants**

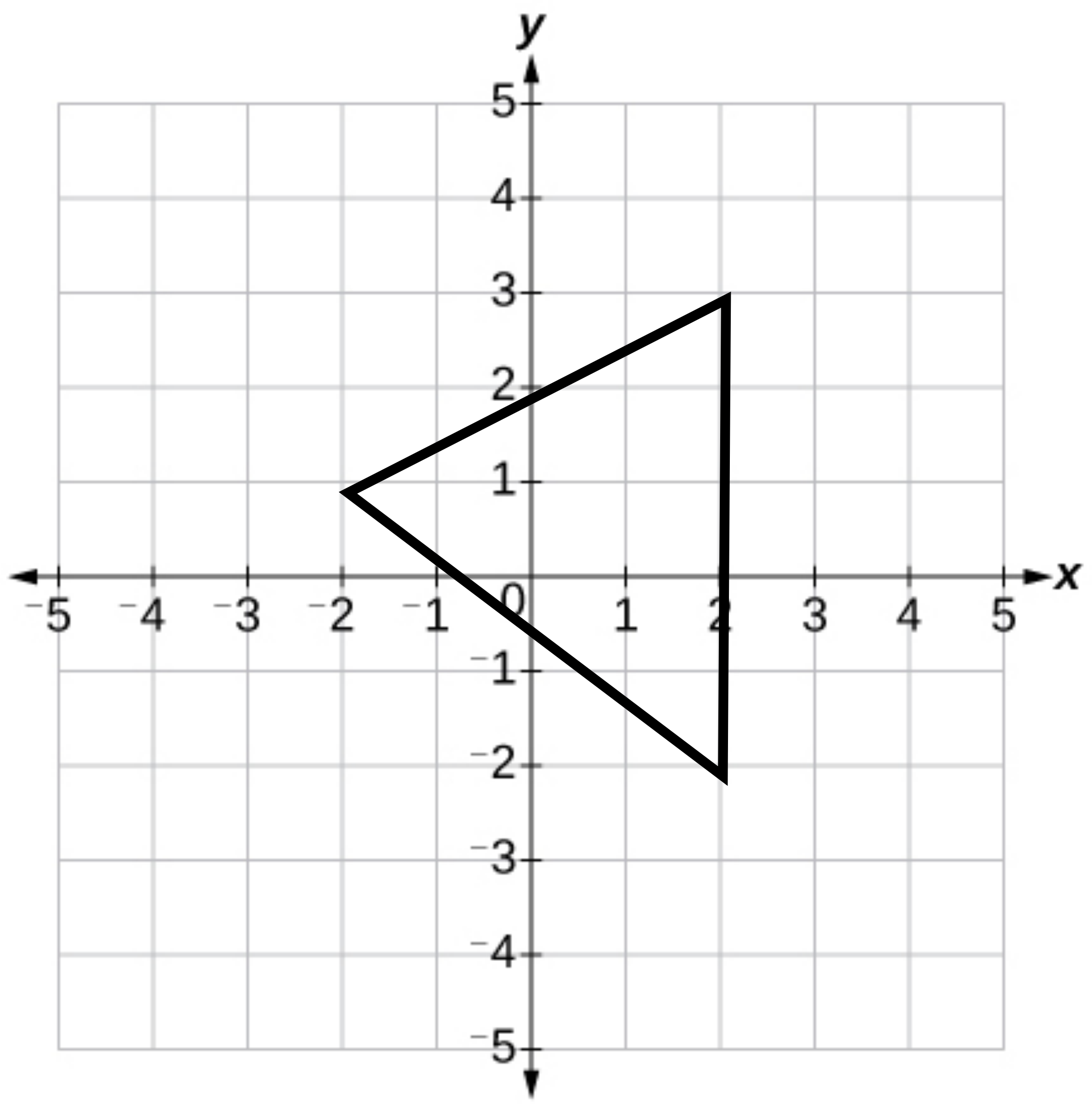
- Combien de correspondances?

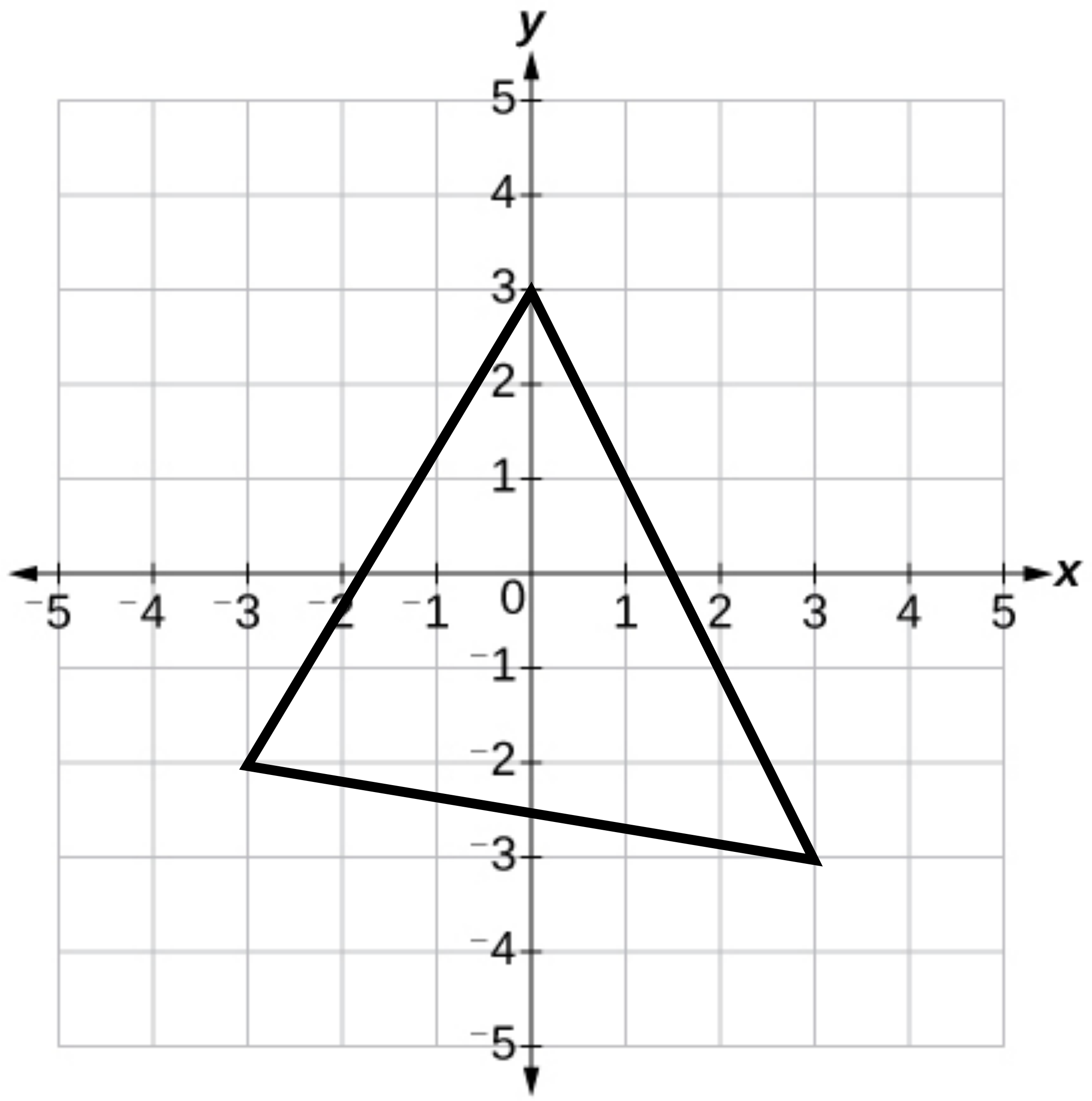
image 1

image 2

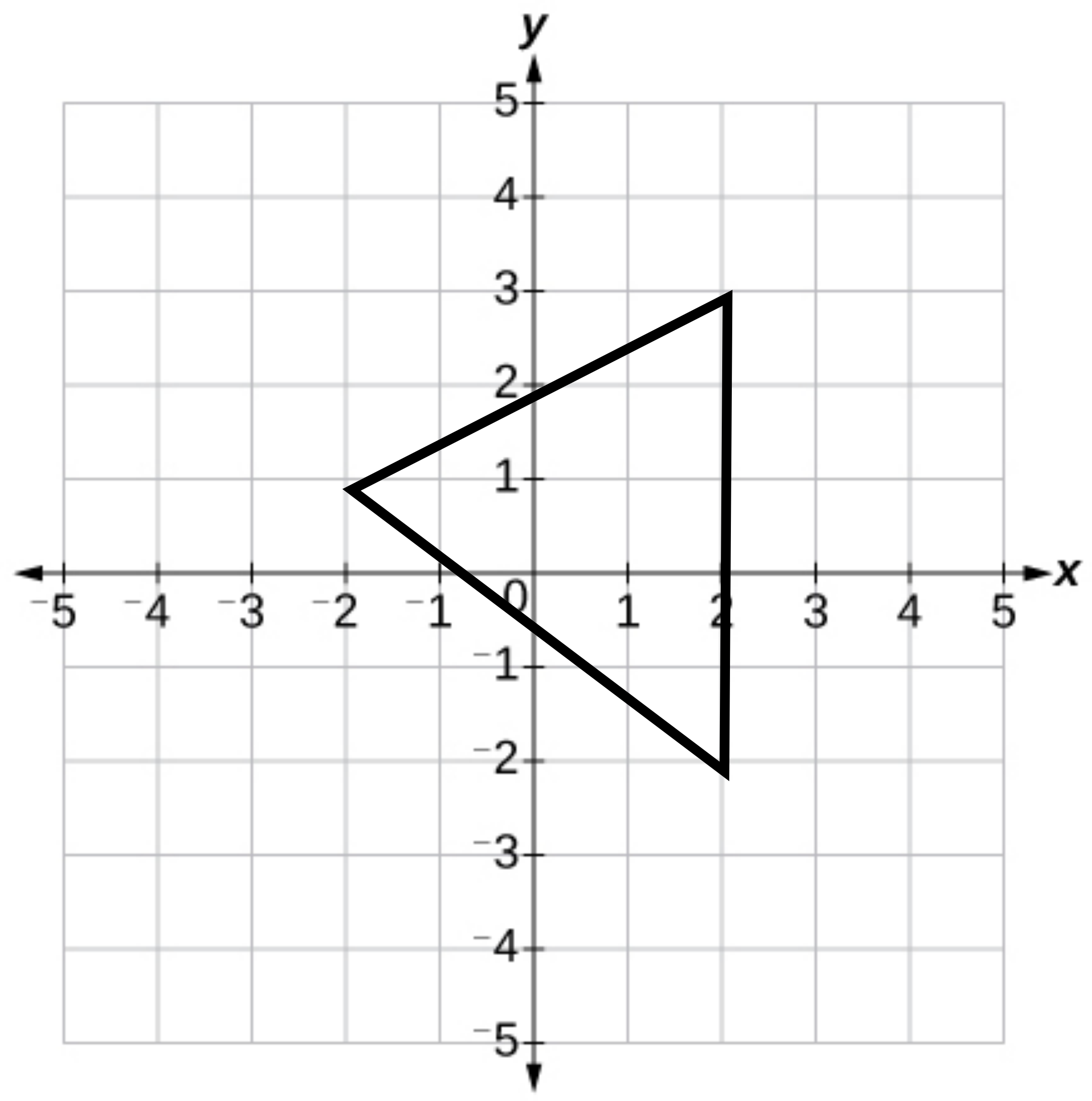
Questions

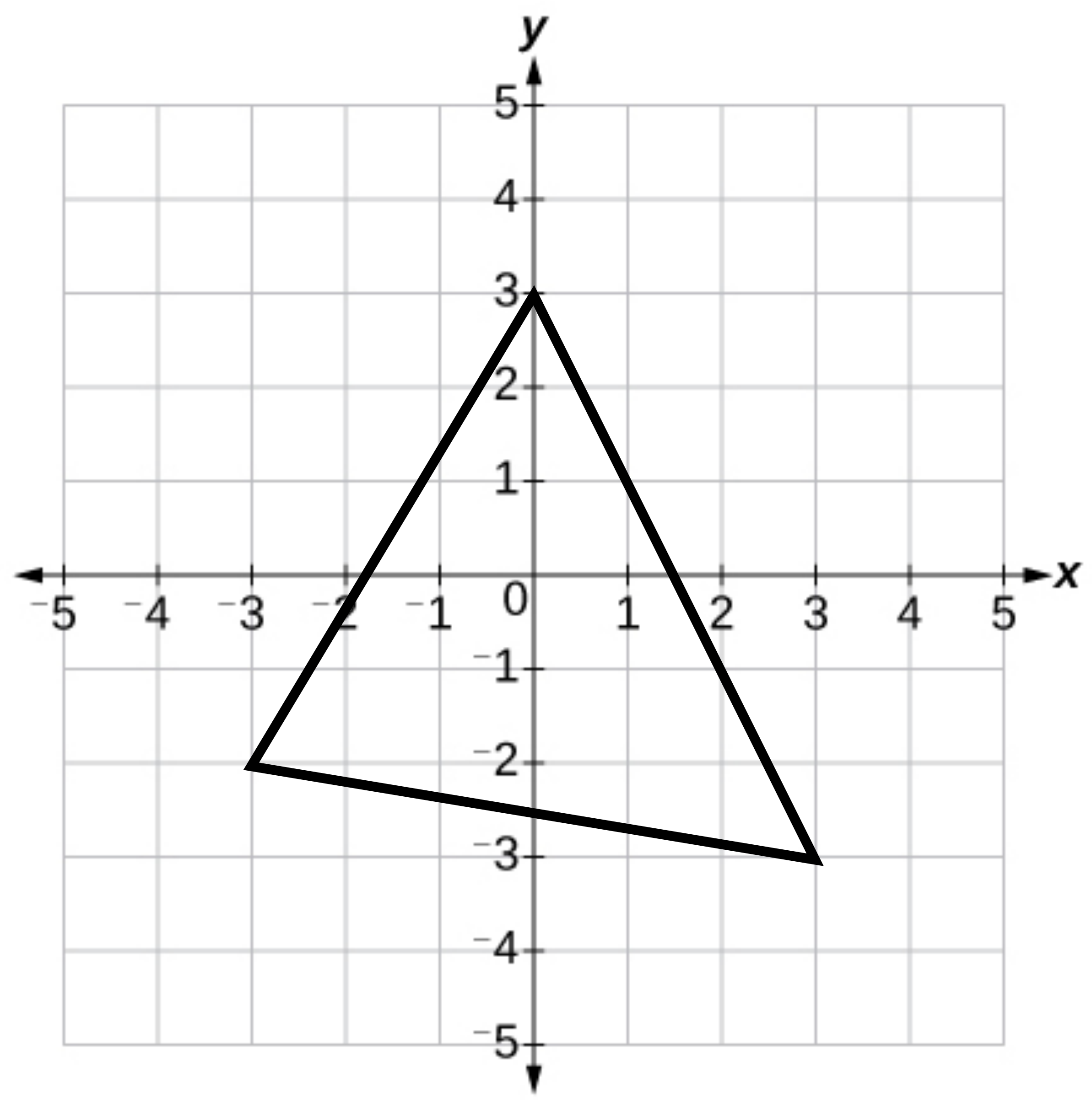
- Supposons que nous avons deux triangles
- Quelle est la transformation entre ces deux triangles?
- Comment pouvons-nous estimer les paramètres de cette transformation?





Transformation affine

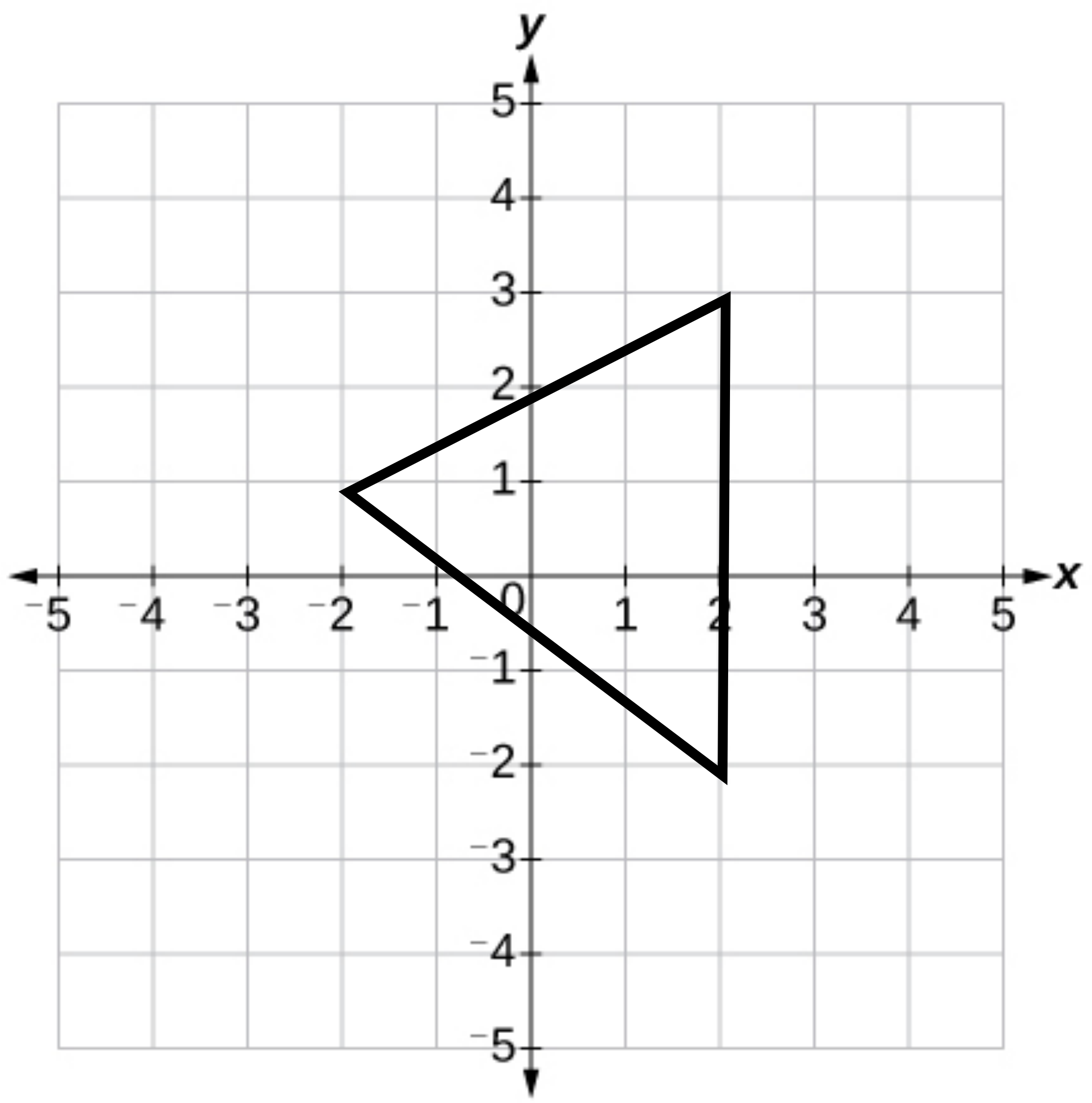




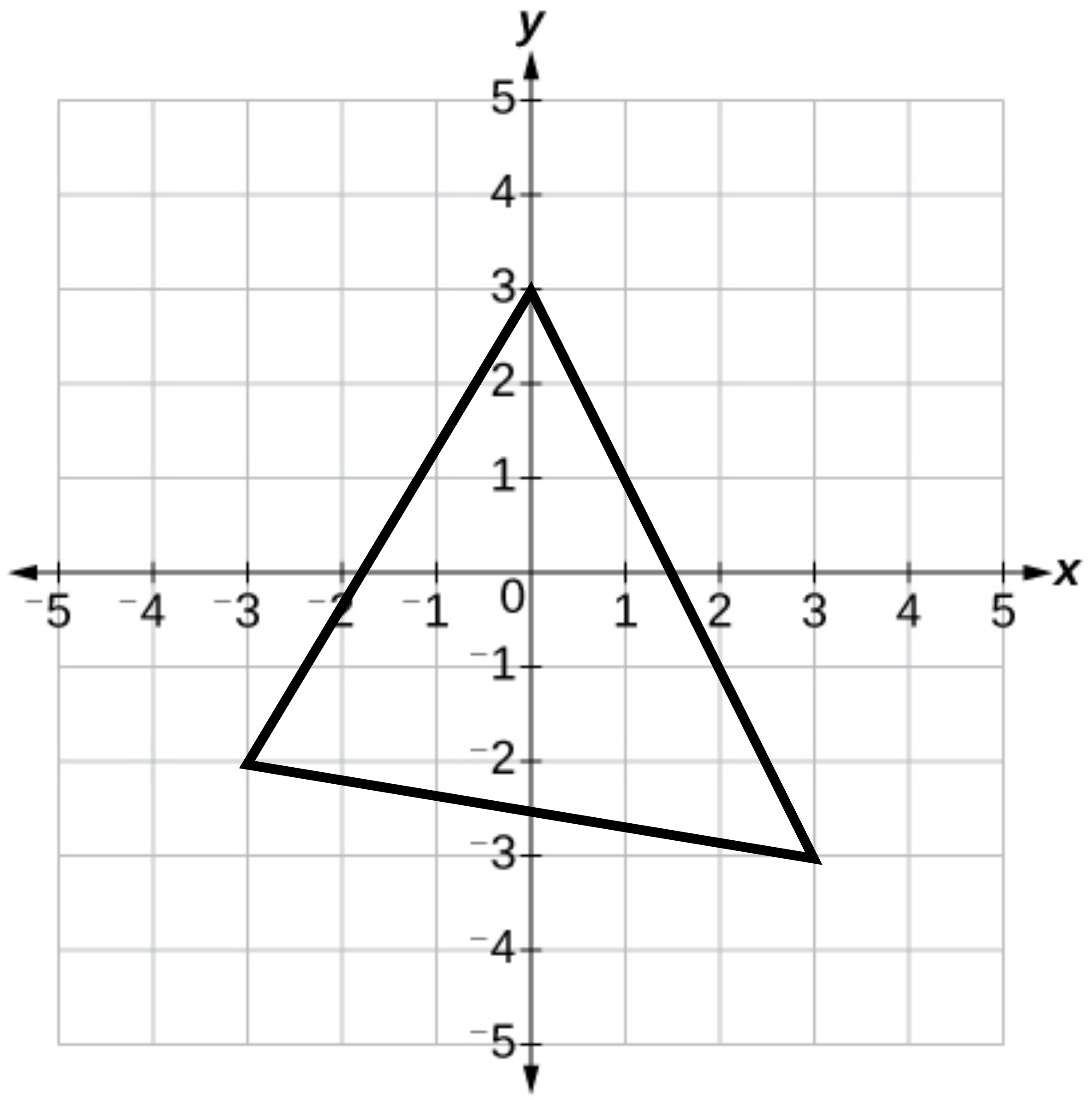
$$x_i' = ax_i + by_i + c$$
$$y_i' = dx_i + ey_i + f$$

Transformation affine

$$x'_i = ax_i + by_i + c$$
$$y'_i = dx_i + ey_i + f$$



$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$



6 équations, 6 inconnues

Estimer une transformation projective

On y reviendra plus tard…

- Combien de correspondances?

image 1

image 2

Transformations d'images

Appliquer une transformation

GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique
Jean-François Lalonde

Merci à D. Hoiem, A. Efros et S. Seitz

Déformation d’image

Hypothèse : les bordures de l’image ne changent pas

- Étant données une image et une transformation **T**, comment calculer l’image déformée?

image 1

image 2

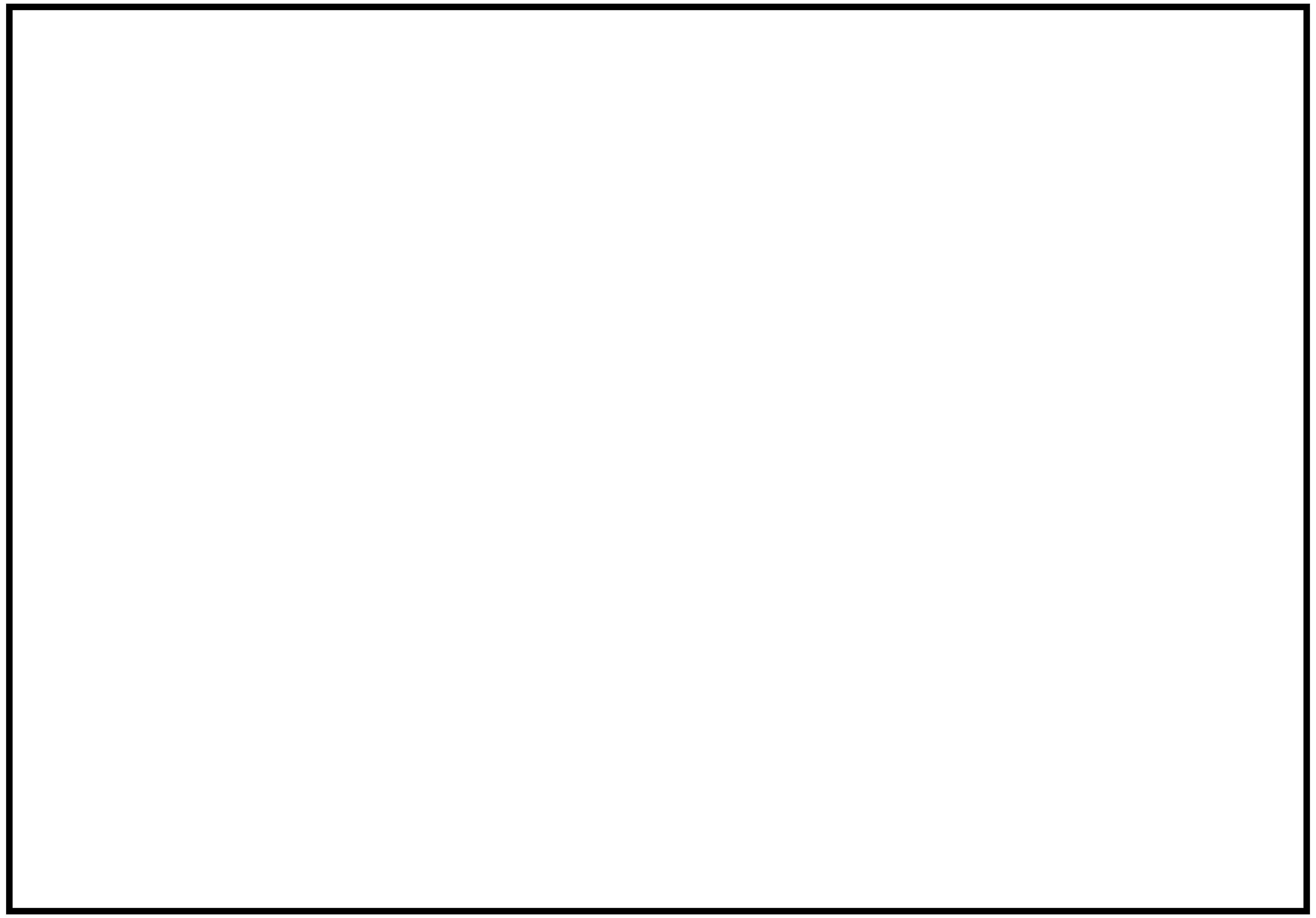
?

Idée 1 : transformation directe

- Pour chaque pixel, calculer sa nouvelle position et “copier-coller” sa couleur

image 1

image 2



Idée 1 : transformation directe

Problème?

- Pour chaque pixel dans l'image 1, calculer sa position dans l'image 2 et « copier-coller » sa couleur

image 1

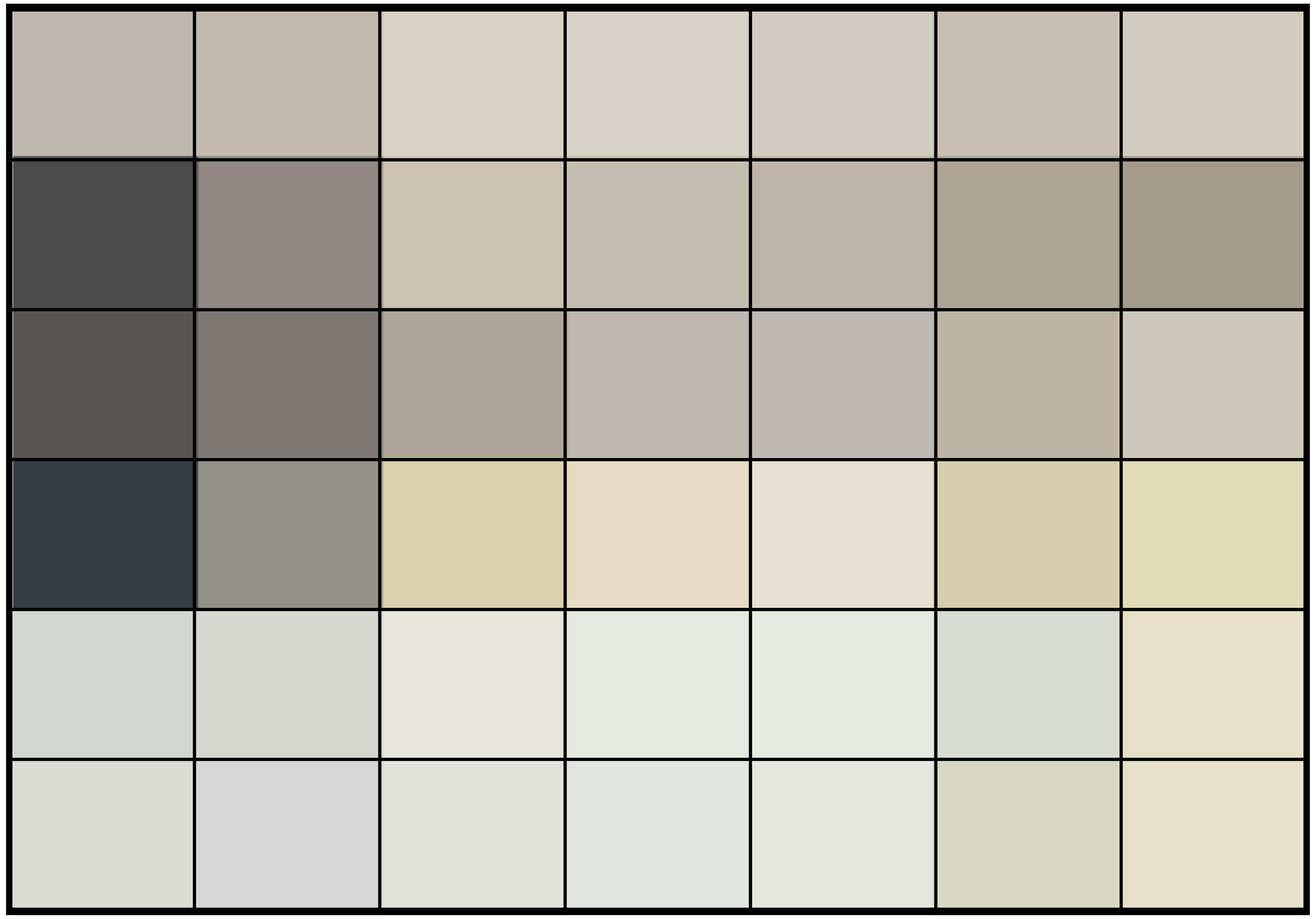
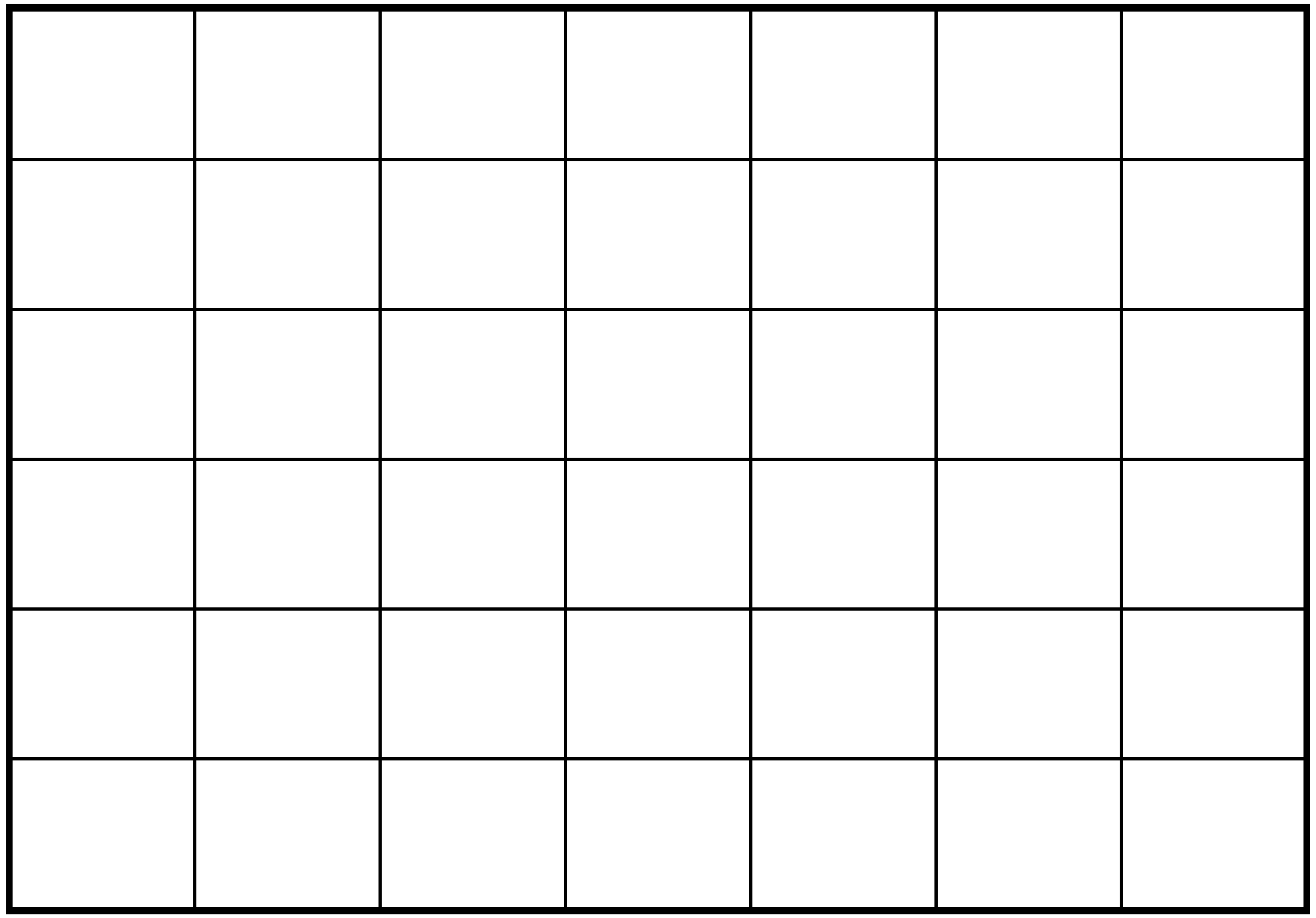


image 2



Idée 2 : transformation inverse

Approche privilégiée!

- Pour chaque pixel dans l’image 2, calculer sa position dans l’image 1 (selon la transformation **inverse**!)

image 1

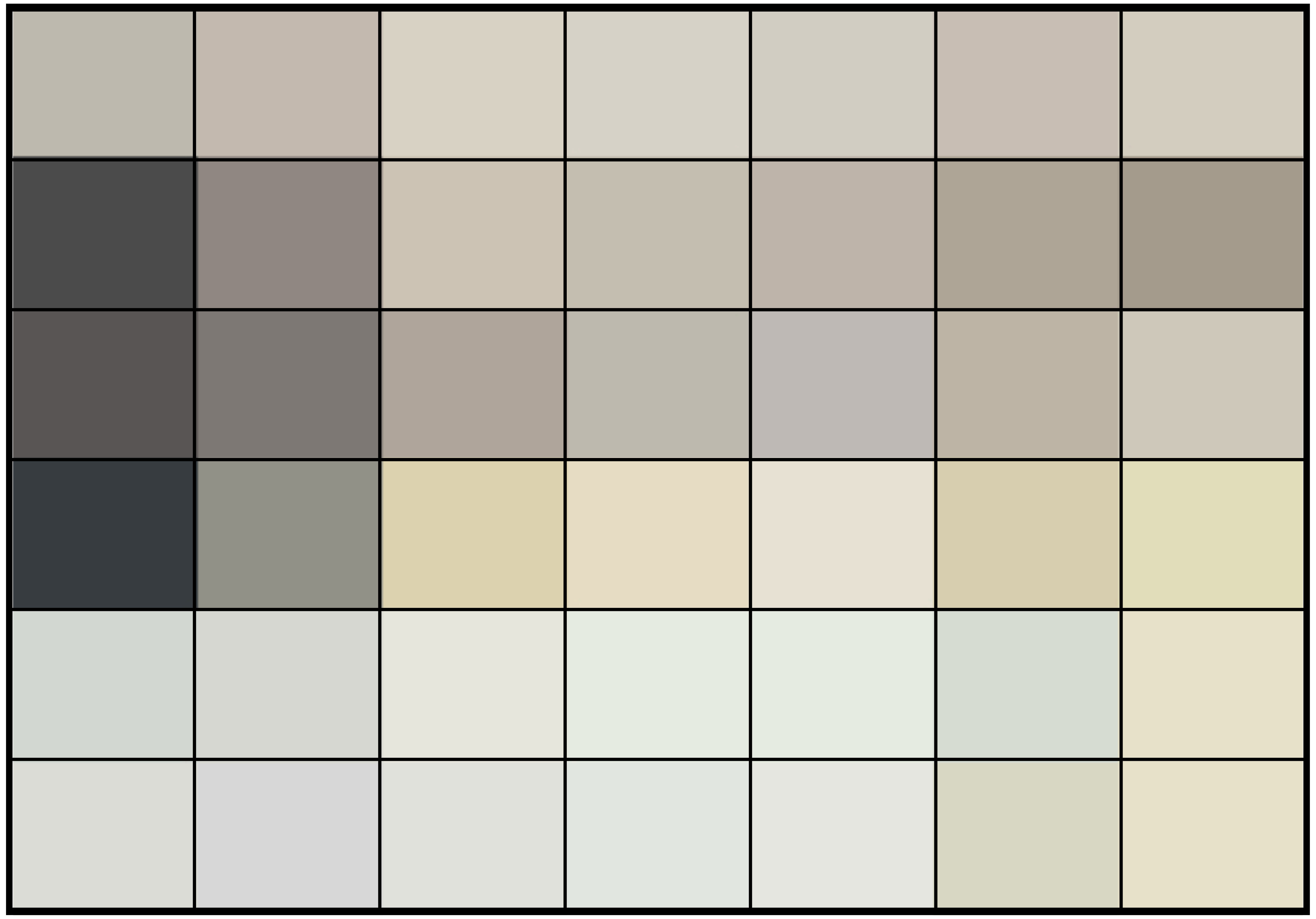
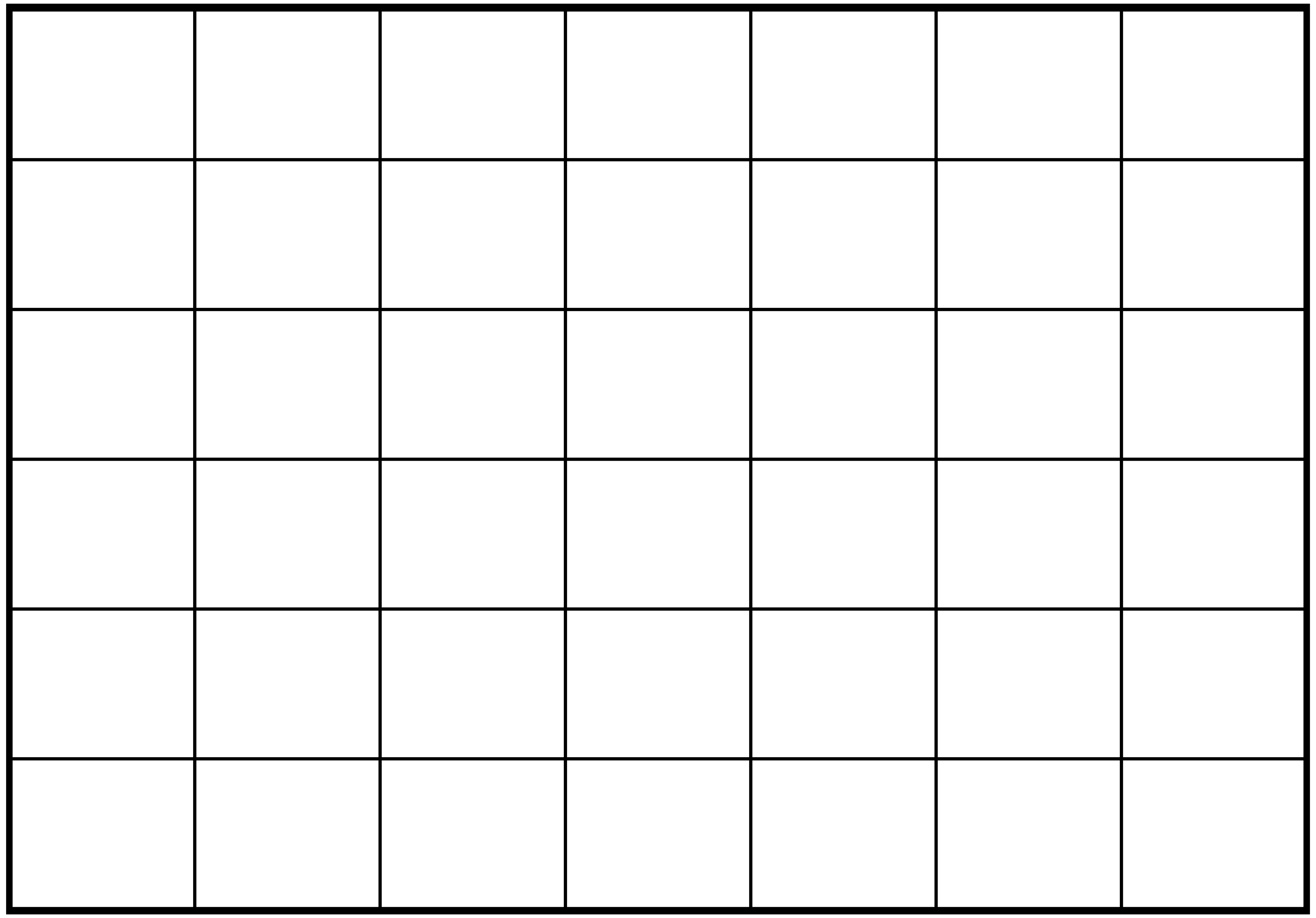


image 2



Idée 2 : transformation inverse

Interpolation bilinéaire :

$$f(x,y) \approx \begin{bmatrix} 1-x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix}$$

mais plusieurs autres options possibles!

image 2